# Exercícios

## Probabilidades

Prof. Me. Lineu Alberto Cavazani de Freitas

Departamento de Estatística
Laboratório de Estatística e Geoinformação

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

# Exercício 1

# Exercício 1

Forneça exemplos que ilustrem situações nas quais probabilidades são avaliadas pelas definições:

1. Clássica.
2. Frequentista.
3. Subjetiva.

# Exercício 2

# Exercício 2

Defina o espaço amostral para cada um dos seguintes experimentos aleatórios.

1. Lançamento de dois dados. Anota-se a configuração obtida.
2. Numa linha de produção conta-se o número de peças defeituosas no intervalo de uma hora.
3. Investigam-se famílias com 3 crianças, anotando a configuração segundo o sexo.
4. Investigam-se famílias com 3 crianças, anotando o número de filhas mulheres.
5. Numa entrevista telefônica, anota-se se o proprietário tem ou não máquina de secar roupa.
6. Mede-se a duração de lâmpadas, deixando-as acesas até que queimem.
7. Lança-se uma moeda até aparecer cara e anota-se o número de lançamentos.
8. Possíveis pares de cinco pessoas (A,B,C,D,E) tomadas sem reposição em que a ordem não importa (AB = BA).
9. A nota final de um aluno é verificada. As notas podem assumir valores entre 0 e 100 em uma escala contínua.
10. De uma prova de múltipla escolha com 10 questões, anota-se o número de questões corretas.

# Exercício 2

1. $\Omega = \{(1{,}1), (1{,}2), (1{,}3), (1{,}4), (1{,}5), (1{,}6), (2{,}1), (2{,}2), (2{,}3), \cdots, (6{,}2), (6{,}3), (6{,}4), (6{,}5), (6{,}6)\}$.
2. $\Omega = \{0, 1, 2, ...\}$
3. $\Omega = \{MMM, MMF, MFM, FMM, FFM, FMF, MFF, FFF\}$.
4. $\Omega = \{0, 1, 2, 3\}$.
5. $\Omega = \{Sim, Não\}$.
6. Sendo $t$ o tempo de duração: $\Omega = \{t | t \geq 0\}$.
7. $\Omega = \{1{,}2{,}3, \cdots\}$.
8. $\Omega = \{(A{,}B); (A{,}C); (A{,}D); (A{,}E); (B{,}C); (B{,}D); (B{,}E); (C{,}D); (C{,}E); (D{,}E)\}$.
9. Sendo $n$ a nota: $\Omega = \{n | 0 \leq n \leq 100\}$.
10. $\Omega = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$.

# Exercício 3

# Exercício 3

Assinale com V (verdadeiro) ou com F (falso). Corrija os itens falsos.

1. $(A \cap B)^c = A \cup B$.
2. $A \cap \phi = \phi$.
3. $A \cap \Omega = \Omega$.
4. $A \cap A^c = \phi$.
5. $A \cup \phi = \phi$.
6. $A \cup \Omega = \Omega$.
7. $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$.
8. $\phi^c = \Omega$.
9. $\Omega^c = \Omega$.
10. $A \cup A^c = \Omega$.

# Exercício 3

Assinale com V (verdadeiro) ou com F (falso). Corrija os itens falsos.

1. $(A \cap B)^c = A \cup B$. **(F)**. $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$
2. $A \cap \phi = \phi$. **(V)**
3. $A \cap \Omega = \Omega$. **(F)**. $A \cap \Omega = A$.
4. $A \cap A^c = \phi$. **(V)**.
5. $A \cup \phi = \phi$. **(F)**. $A \cup \phi = A$.
6. $A \cup \Omega = \Omega$. **(V)**
7. $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$. **(V)**
8. $\phi^c = \Omega$. **(V)**
9. $\Omega^c = \Omega$. **(F)**. $\Omega^c = \phi$.
10. $A \cup A^c = \Omega$. **(V)**.

# Exercício 4

# Exercício 4

Três indivíduos tentam, de forma independente, resolver um problema. O primeiro tem 50% de chance de resolver, o segundo tem 65% e o terceiro tem 30%. Qual a probabilidade do problema ser resolvido?

# Exercício 4

Eventos:

$$\begin{array}{lll} A: \text{o primeiro resolve o problema} & P(A) = 0{,}50 & P(A^c) = 0{,}50 \\ B: \text{o segundo resolve o problema} & P(B) = 0{,}65 & P(B^c) = 0{,}35 \\ C: \text{o terceiro resolve o problema} & P(C) = 0{,}30 & P(C^c) = 0{,}70 \end{array}$$

- O problema será resolvido se ao menos um dos três indivíduos resolver o problema, ou seja, precisamos calcular $P(A \cup B \cup C)$.
- Podemos calcular usando a regra da adição quando generalizada para 3 eventos ou pela regra do complementar.

# Exercício 4

**Pela regra da adição:**

- Generalizando a regra da adição para 3 eventos:

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C) =$$

$$0{,}5 + 0{,}65 + 0{,}3 - 0{,}325 - 0{,}15 - 0{,}195 + 0{,}0975 =$$

$$0{,}8775$$

# Exercício 4

**Pela regra do complementar:**

- O oposto a “pelo menos um consegue” ($P(A \cup B \cup C)$) é “nenhum consegue”: $P(A^C \cap B^C \cap C^C)$.
- Como os eventos são independentes basta multiplicar as probabilidades complementares.

$$P(A \cup B \cup C) = 1 - P(A^c \cap B^c \cap C^c) = 1 - [P(A^c) \cdot P(B^c) \cdot P(C^c)] =$$

$$1 - [(1 - 0{,}50)(1 - 0{,}65)(1 - 0{,}30)] = 0{,}8775$$

# Exercício 5

# Exercício 5

Em um teste múltipla escolha, marca-se uma alternativa em cada uma das quatro questões do teste, cada uma com cinco alternativas da qual apenas uma é correta. Qual a probabilidade de um indivíduo acertar por mero acaso alguma questão?

# Exercício 5

- Para uma questão qualquer, sendo A o evento acerto: $P(A) = 0{,}2$ e $P(A^c) = 0{,}8$.
- O complementar de "acertar alguma" é "errar todas".
- Considerando que o acerto de uma questão independe das outras, esta probabilidade é dada por: $P(errar\ todas) = 0{,}8^4$.
- Pela regra do complementar:
$P(acertar\ alguma) = 1 - P(errar\ todas) = 1 - 0{,}8^4 = 0{,}59$.

# Exercício 6

# Exercício 6

Suponha que o dado foi jogado, e, sem saber o resultado, você recebe a informação de que ocorreu face par. Qual é a probabilidade de ter saido face 4 com essa “nova” informação?

# Exercício 6

Trata-se de um problema de probabilidade condicional.

- Espaço amostral: $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$.
- Eventos de interesse:
  - A: face 4.
  - B: face par.
- Probabilidade de sair 4 sabendo que o resultado é par:
  - Probabilidade condicional: P(A|B).
  - $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$.

- Probabilidades:
  - $P(A) = 1/6$.
  - $P(B) = 3/6 = 1/2$.
  - $P(A \cap B) = 1/6$.

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{1/6}{3/6} = \frac{1}{3}$$

# Exercício 7

# Exercício 7

Uma urna contém duas bolas brancas e 3 vermelhas. Suponha que são sorteadas duas bolas ao acaso. Enuncie quais são os possíveis resultados e quais as probabilidades de cada resultado considerando dois cenários: amostra com reposição e sem reposição.

# Exercício 7

B: bola branca. V: bola vermelha. $\Omega = \{(BB),(BV),(VB),(VV)\}$.

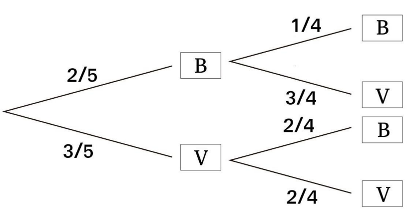


Figura 1. Sem reposição.

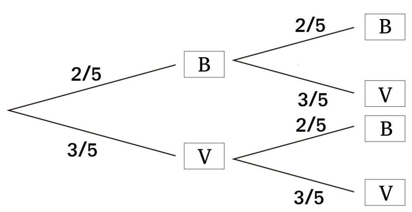


Figura 2. Com reposição.

| Resultados | Sem reposição |
|---|---|
| (BB) | $2/5 \times 1/4 = 2/20$ |
| (BV) | $2/5 \times 3/4 = 6/20$ |
| (VB) | $3/5 \times 2/4 = 6/20$ |
| (VV) | $3/5 \times 2/4 = 6/20$ |

| Resultados | Com reposição |
|---|---|
| (BB) | $2/5 \times 2/5 = 4/25$ |
| (BV) | $2/5 \times 3/5 = 6/25$ |
| (VB) | $3/5 \times 2/5 = 6/25$ |
| (VV) | $3/5 \times 3/5 = 9/25$ |

# Exercício 8

# Exercício 8

Um estabilizador pode provir de três fabricantes: I, II e III com probabilidades de 0,25, 0,35 e 0,40, respectivamente.

As probabilidades de que durante determinado período de tempo, o estabilizador não funcione bem são, respectivamente, 0,10; 0,05 e 0,08 para cada um dos fabricantes.

Qual é a probabilidade de que um estabilizador escolhido ao acaso não funcione bem durante o período de tempo especificado.

Dado que um estabilizador escolhido ao acaso não funciona bem durante o período de tempo especificado, qual a probabilidade de que tenha sido produzido pelo fabricante I?

# Exercício 8

- $C1$: estabilizador do fabricante I.
- $C2$: estabilizador do fabricante II.
- $C3$: estabilizador do fabricante III.
- $A$: estabilizador não funcionar bem.
- $P(C1) = 0{,}25$.
- $P(C2) = 0{,}35$.
- $P(C3) = 0{,}40$.

- $P(A|C1) = 0{,}1$.
- $P(A|C2) = 0{,}05$.
- $P(A|C3) = 0{,}08$.
- $P(A) = ?$
- $P(C1|A) = ?$

# Exercício 8

$$P(A) = [P(A|C1) \times P(C1)] + [P(A|C2) \times P(C2)] + [P(A|C3) \times P(C3)]$$

$$P(A) = [0{,}1 \times 0{,}25] + [0{,}05 \times 0{,}35] + [0{,}08 \times 0{,}4] = 0,0745$$

$$P(C1|A) = \frac{P(C1) \times P(A|C1)}{P(A)} = \frac{0{,}25 \times 0{,}1}{0{,}0745} = 0{,}335$$