Exercícios de Probabilidade

Paulo Justiniano Ribeiro Jr

Versão compilada em 22 de abril de 2024 às 10:39

1. Três indivíduos tentam, de forma independente, resolver um problema. O primeiro tem 50% de chance de resolver, o segundo tem 65% e o terceiro tem 30%. Qual a probabilidade do problema ser resolvido?

Solução:

$$\begin{aligned} A &: \text{o primeiro resolve o problema} \quad P(A) = 0,50 \quad P(\overline{A}) = 0,50 \\ B &: \text{o segundo resolve o problema} \quad P(B) = 0,65 \quad P(\overline{B}) = 0,35 \\ C &: \text{o terceiro resolve o problema} \quad P(C) = 0,30 \quad P(\overline{C}) = 0,70 \end{aligned}$$

$$P(A \cup B \cup C) = 1 - P(\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}) \overset{ind}{=} 1 - P(\overline{A}) \cdot P(\overline{B}) \cdot P(\overline{C}) = 1 - (1 - 0,50)(1 - 0,65)(1 - 0,30) = 0{,}878$$

---

2. Dentre seis números inteiros pares e oito ímpares, todos diferentes um do outro, dois números são escolhidos ao acaso e multiplicados. Qual a probabilidade de que o produto seja par?

Solução:

Evento	$Par \cap Par$	$Par \cap Impar$	$Impar \cap Par$	$Impar \cap Impar$
Produto	Par	Par	Par	$Impar$
Probabilidade	$\frac{6}{14}\frac{5}{13}$	$\frac{6}{14}\frac{8}{13}$	$\frac{8}{14}\frac{6}{13}$	$\frac{8}{14}\frac{7}{13}$

$$P[ProdutoPar] = 1 - P[ProdutoImpar] = 1 - \frac{8}{14}\frac{7}{13} = 0{,}692$$

---

3. Em um programa da regeneração são plantadas 10 mudas de uma determinada espécie em cada uma das unidades de manejo. A probabilidade de que qualquer muda complete dois anos de idade é de 0,20. Fazendo suposições necessárias, responda os itens a seguir.

   (a) Qual a probabilidade de uma unidade ter alguma planta com dois anos?

   (b) Quantas mudas deveriam plantadas para que a probabilidade de alguma planta completar dois anos seja superior a 0,99 ?

   (c) Qual deveria ser a probabilidade de cada muda completar dois anos para que a probabilidade da unidade ter alguma muda fosse superior a 0,95?

   (d) Descreva e discuta as suposições feitas para resolver o problema indicando situações em que elas poderiam ser inválidas.

Solução:

$$\begin{aligned} \text{Evento } P_i &: \text{ a i-ésima planta completa 2 anos} \quad P[P_i] = 0,2 = P[P] \longrightarrow P[\overline{P}_i] = 0,8 = P[\overline{P}] \\ \text{Evento } C &: \text{ a unidade tem ao menos 1 planta após 2 anos} \end{aligned}$$

(a) $P[C] = 1 - P[\overline{C}] = 1 - P[\overline{P}_1 \cap \overline{P}_2 \cap \ldots \cap \overline{P}_{10}] = 1 - \prod_{i=1}^{10} P[\overline{P}_i] = 1 - P[\overline{P}]^{10} = 1 - 0,8^{10} = 0{,}893$

(b) $P[C] > 0,99 \longrightarrow 1 - 0,8^n > 0,99 \longrightarrow 0,8^n < 0,01 \longrightarrow n \geq \frac{\log(0{,}01)}{\log(0{,}80)} = 21$

(c) $P[C] > 0,95 \longrightarrow 1 - P[\overline{P}]^{10} > 0,95 \longrightarrow P[\overline{P}]^{10} < 0,05 \longrightarrow P[\overline{P}] < (0,05)^{1/10} = 0{,}74 \longrightarrow P[P] = 0{,}26$

(d)

---

4. Uma urna contém doze bolas brancas e oito bolas vermelhas. Serão retiradas, sequencialmente, três bolas da urna. A cada bola anota-se a cor e, se a bola for vermelha, ela é retornada à urna e, se for branca, ela é posta de lado.

   (a) Forneça o espaço amostral do experimento.
   (b) Calcule probabilidade de cada elemento do espaço amostral.
   (c) Qual a probabilidade de não se obter todas as bolas da mesma cor?
   (d) Qual a probabilidade de se retirar ao menos duas bolas brancas?
   (e) Qual a probabilidade de retirar três vermelhas sabendo-se que ao menos uma das bolas é vermelha?
   (f) Se a primeira bola for branca, qual a probabilidade de obter três bolas brancas?

Solução:

(a) $\Omega = \{(B,B,B),(B,B,V),(B,V,B),(V,B,B),(B,V,V),(V,B,V),(V,V,B),(V,V,V)\}$

(b)

Evento	(B,B,B)	(B,B,V)	(B,V,B)	(V,B,B)	(B,V,V)	(V,B,V)	(V,V,B)	(V,V,V)
Probabilidade	$\frac{12}{20}\frac{11}{19}\frac{10}{18}$	$\frac{12}{20}\frac{11}{19}\frac{8}{18}$	$\frac{12}{20}\frac{8}{19}\frac{11}{19}$	$\frac{8}{20}\frac{12}{20}\frac{11}{19}$	$\frac{12}{20}\frac{8}{19}\frac{8}{19}$	$\frac{8}{20}\frac{12}{20}\frac{8}{19}$	$\frac{8}{20}\frac{8}{20}\frac{12}{20}$	$\frac{8}{20}\frac{8}{20}\frac{8}{20}$

(c) $P = 1 - P[(B,B,B)] - P[(V,V,V)] = 1 - \frac{12}{20}\frac{11}{19}\frac{10}{18} - \frac{8}{20}\frac{8}{20}\frac{8}{20} = 0{,}743$

(d) $P = P[(B,B,B)] + P[(B,B,V)] + P[(B,V,B)] + P[(V,B,B)] = \frac{12}{20}\frac{11}{19}\frac{10}{18} + \frac{12}{20}\frac{11}{19}\frac{8}{18} + \frac{12}{20}\frac{8}{19}\frac{11}{19} + \frac{8}{20}\frac{12}{20}\frac{11}{19} = 0{,}6326$

(e) $P = \frac{P[(V,V,V)]}{1 - P[(B,B,B)]} = \frac{\frac{8}{20}\frac{8}{20}\frac{8}{20}}{1 - \frac{12}{20}\frac{11}{19}\frac{10}{18}} = 0{,}0793$

(f) $P = \frac{P[(B,B,B)]}{P[(B,B,B)] + P[(B,B,V)] + P[(B,V,B)] + P[(B,V,V)]} = \frac{\frac{12}{20}\frac{11}{19}\frac{10}{18}}{\frac{12}{20}\frac{11}{19}\frac{10}{18} + \frac{12}{20}\frac{11}{19}\frac{8}{18} + \frac{12}{20}\frac{8}{19}\frac{11}{19} + \frac{12}{20}\frac{8}{19}\frac{8}{19}} = 0{,}3216$

---

5. Um professor preparou 40 versões diferentes de uma lista de exercícios. As listas são atribuídas ao acaso sorteando-se para cada estudante um número de 1 a 40 que identifica a lista a ser recebida. Se um grupo de três colegas decide fazer as listas juntos, qual a probabilidade de que dois ou mais deles recebam a mesma versão?

Solução:

$$\begin{aligned}
\text{Espaço Amostral: } & S \text{ todas possíveis atribuições de 40 listas para 3 estudantes} \\
n(S) &= 40 \cdot 40 \cdot 40 \\
\text{Evento: } & E \text{ coincidência de lista em ao menos 2 estudantes} \\
& \overline{E} \text{ sem coincidência de listas} \\
n(\overline{E}) &= 40 \cdot 39 \cdot 38 \\
P[E] &= 1 - P[\overline{E}] = 1 - \frac{n(\overline{E})}{n(S)} = 1 - \frac{40 \cdot 39 \cdot 38}{40^3} = 0{,}0737.
\end{aligned}$$

Nota: este exercício é semelhante ao problema da *coincidência de aniversários* em um grupo de pessoas.

---

6. A probabilidade de haver algum acidente considerado grave em um dia, em um trecho de uma rodovia é de 0,04 se não chove e de 0,12 se chove. Sabe-se que, no período considerado, chove em 30% dos dias.

   (a) Se em um determinado dia não houve nenhum acidente, qual a probabilidade que não tenha chovido?
   (b) qual a probabilidade de que, chovendo ou não, haja acidente?

Solução:
Eventos e probabilidades informadas:

$$A : \text{ocorre acidente} \quad \overline{A} : \text{não ocorre acidente}$$
$$C : \text{chove} \quad \overline{C} : \text{não chove}$$
$$P[A|\overline{C}] = 0,04 \longrightarrow P[\overline{A}|\overline{C}] = 1 - 0,04 = 0,96$$
$$P[A|C] = 0,12 \longrightarrow P[\overline{A}|C] = 1 - 0,12 = 0,88$$
$$P[C] = 0,30 \longrightarrow P[\overline{C}] = 1 - 0,30 = 0,70$$

Probabilidades pedidas:

(a) $P[\overline{C}|\overline{A}] = \frac{P[\overline{C}\cap\overline{A}]}{P[\overline{A}]} = \frac{P[\overline{C}\cap\overline{A}]}{P[\overline{C}\cap\overline{A}]+P[C\cap\overline{A}]} = \frac{P[\overline{C}]\cdot P[\overline{A}|\overline{C}]}{P[\overline{C}]\cdot P[\overline{A}|\overline{C}]+P[C]\cdot P[\overline{A}|C]} = \frac{0{,}70\cdot 0{,}96}{0.70\cdot 0{,}96+0{,}30\cdot 0{,}88} = 0{,}718$

(b) $P[A] = P[A\cap C] + P[A\cap\overline{C}] = P[C]\cdot P[A|C] + P[\overline{C}]\cdot P[A|\overline{C}] = 0,30\cdot 0,12 + 0,70\cdot 0,04 = 0{,}064$

OBS: pode-se ver a solução organizando os dados em uma tabela. Este problema é análogo ao do teste de diagnóstico.

---

7. Em um grupo de estudantes 45% são do curso A, 25% do curso B o restante do curso C. A proporção de mulheres em cada curso um dos cursos é de 20, 50 e 75%, respectivamente. Se um estudante é sorteado qual a probabilidade de:

(a) seja homem;
(b) seja do curso A, sabendo que foi sorteada uma mulher;
(c) seja do curso C sabendo que foi sorteado um homem.

Solução:

(a) $P[H] = 1-P[M] = 1-(P[M\cap A]+P[M\cap B]+P[M\cap C]) = 1-(P[M|A]\cdot P[A]+P[M|B]\cdot P[B]+P[M|C]\cdot P[C]) = 1-(0,20\cdot 0,45+0,50\cdot 0,25+0,75\cdot 0,30) = 1-0{,}44 = 0{,}56$

(b) $P[A|M] = \frac{P[A\cap M]}{P[M]} = \frac{P[M|A]\cdot P[A]}{P[M]} = \frac{0{,}09}{0{,}44} = 0{,}205$

(c) $P[C|H] = \frac{P[C\cap H]}{1-P[M]} = \frac{P[H|C]\cdot P[C]}{P[H]} = \frac{0{,}075}{0{,}56} = 0{,}134$

OBS: pode-se ver a solução organizando os dados em uma tabela como a seguir e completando as caselas da tabela.

Sexo/Curso	A	B	C	Total
Feminino (M)	(0,20)(0,45)	(0,50)(0,25)	(0,75)(0,30)	
Masculino (H)				
Total	0,45	0,25	0,30	1

---

8. Um algorítmo de classificação deve tentar resolver corretamente dois problemas, A e B. A probabilidade resolver A corretamente é de 0,6. Caso resolva A corretamente, a probabilidade de resolver B corretamente é de 0,85; caso contrário, essa probabilidade é de 0,25.

(a) Qual a probabilidade de ele:
   i. resolver corretamente os dois problemas?
   ii. resolver corretamente apenas um dos problemas?
   iii. não resolver nenhum corretamente?
(b) os eventos "resolver corretamente A" e "resolver corretamente B",
   i. são independentes? (justifique)
   ii. são mutuamente exclusivos? (justifique)

Solução:

$$A: \text{ resolver corretamente o problema A}$$
$$B: \text{ resolver corretamente o problema B}$$
$$P[A] = 0,6 \quad ; \quad P[B|A] = 0,85 \quad ; \quad P[B|\overline{A}] = 0,25$$
$$P[\overline{A}] = 0,4 \quad ; \quad P[\overline{B}|A] = 0,15 \quad ; \quad P[\overline{B}|\overline{A}] = 0,75$$

(a)
  i. $P[A \cap B] = P[A] \cdot P[B|A] = (0,6) \cdot (0,85) = 0{,}51$
  ii. $P[A \cap \overline{B}] + P[\overline{A} \cap B] = P[A] \cdot P[\overline{B}|A] + P[\overline{A}] \cdot P[B|\overline{A}] = (0,6) \cdot (0,15) + (0,4) \cdot (0,25) = 0{,}19$
  iii. $P[\overline{A} \cap \overline{B}] = P[\overline{A}] \cdot P[\overline{B}|\overline{A}] = (0,4) \cdot (0,75) = 0{,}3$

(b)
  i. Não, pois $P[A \cap B] = 0{,}51 \neq P[A] \cdot P[B] = 0{,}61$,
  em que $P[B] = P[B \cap A] + P[B \cap \overline{A}] = (0,6)(0,85) + (0,4)(0,25) = 0{,}61$
  ii. Não pois $P[A \cap B] \neq 0$

---

9. A probabilidade de um programador cometer um erro de sintaxe em uma primeira versão de seu trabalho é de 2/5. Caso cometa o erro de sintaxe, a probabilidade de comentar um erro de lógica é de 7/10, caso contrário essa probabilidade é de 1/4. Calcule a probabilidade de ele:

(a) cometer os dois erros
(b) cometer apenas um dos erros
(c) não cometer erros.

Solução:

Notação e dados:

S :comete erro de sintaxe

L :comete erro de lógica

$P[S] = 2/5$

$P[L|S] = 7/10$ $\qquad$ $P[L|\overline{S}] = 1/4$

Portanto

$P[\overline{L}|S] = 3/10$ $\qquad$ $P[\overline{L}|\overline{S}] = 3/4$

(a) $P[S \cap L] = P[S] \cdot [L|S] = \frac{2}{5} \cdot \frac{7}{10} = 0{,}28 = 0,28$
(b) $P[S \cap \overline{L}] + P[\overline{S} \cap S] = P[S] \cdot [\overline{L}|S] + P[\overline{S}] \cdot P[L|\overline{S}] = \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{10} + \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{4} = 0{,}27 = 0,27$
(c) $P[\overline{S} \cap \overline{L}] = P[\overline{S}] \cdot [\overline{L}|\overline{S}] = \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{4} = 0{,}45 = 0,45$

---

10. Discos de plástico policarbonado de um fornecedor foram analisados quanto a resistência a riscos e a choques. Os resultados de 100 discos analisados são resumidos na tabela a seguir.

resistência	resistência a choques	
a riscos	alta	baixa
alta	80	9
baixa	6	5

Denote por A o evento *o disco tem alta resistência a riscos* e por B o evento *o disco tem alta resistência a choques.*

(a) Obtenha: $P[A]$, $P[A \cap B]$, $P[A^c]$, $P[A^c \cap B^c]$, $P[A^c \cup B]$.

(b) Obtenha: $P[A|B]$, $P[B|A]$, $P[A|B^c]$, $P[B^c|A]$, $P[B|A^c]$.

(c) Se um disco é selecionado ao acaso qual a probabilidade de ter:
- alta resistência a choque e baixa a riscos?
- alta resistência a riscos e baixa a choques?

(d) os eventos ter alta resistência a ambos atributos são mutuamente exclusivos? (justifique)

(e) os eventos ter alta resistência a ambos atributos são independentes? (justifique)

Solução:

Probabilidades conjuntas (interseções).

	B	B^c
A	0,80	0,09
A^c	0,06	0,05

(a)
- $P[A]$ =0,89
- $P[A \cap B]$ =0,8
- $P[A^c]$ =0,11
- $P[A^c \cap B^c]$ =0,05
- $P[A^c \cup B] = P[A^c] + P[B] - P[A^c \cap B]$ =0,91

(b)
- $P[A|B] = \frac{P[A \cap B]}{P[B]}$ =0,93
- $P[B|A] = \frac{P[A \cap B]}{P[A]}$ =0,9
- $P[A|B^c] = \frac{P[A \cap B^c]}{P[B^c]}$ =0,64
- $P[B^c|A] = \frac{P[B^c \cap A]}{P[A]}$ =0,1
- $P[B|A^c] = \frac{P[A^c \cap B]}{P[A^c]}$ =0,55

(c)
- $P[B \cap A^c]$ =0,06
- $P[A \cap B^c]$ =0,09

(d) Não, pois $P[A \cap B] \neq 0$, isto é, os eventos ter alta resistência em ambos os atributos possuem intersecção, por isso não são mutuamente exclusivos. No contexto do exemplo, isto significa, por exemplo, que é possível ter resistência a ambos fatores ao mesmo tempo.

(e) $P[A \cap B] \neq P[A] \cdot P[B]$, isto é, o produto das marginais difere dos valores observados, por isso sabemos que os eventos não são independentes. No contexto do exemplo, as chances de ter resistência a um fator para os casos de se ter ou não resistência ao outro fator.

	B	B^c	Sum
A	0,80	0,09	0,89
A^c	0,06	0,05	0,11
Sum	0,86	0,14	1,00

Tabela 1: Probabilidades conjuntas e marginais.

	B	B^c
A	0,77	0,12
A^c	0,09	0,02

Tabela 2: Probabilidades conjuntas esperadas sob independência.