

Operações com probabilidades

Regra da adição, regra do complementar, probabilidade condicional, regra do produto

Prof. Me. Lineu Alberto Cavazani de Freitas

Departamento de Estatística
Laboratório de Estatística e Geoinformação



Introdução

- ▶ Sabemos que **probabilidades** são valores numéricos que mensuram a **chance** de ocorrência de eventos de um **espaço amostral**.
- ▶ Para operar com probabilidades existem diversas **regras** e **resultados**, tais como:
 - ▶ Regra da adição.
 - ▶ Regra do complementar.
 - ▶ Probabilidade condicional.
 - ▶ Regra do produto.



Regra da adição

Regra da adição

- ▶ A probabilidade da **união** entre dois eventos quaisquer é dada pela regra da **adição** de probabilidades.
- ▶ Para dois eventos quaisquer A e B :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

- ▶ Se A e B são eventos disjuntos/mutuamente exclusivos:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$



Regra do complementar

Regra do complementar

- ▶ A regra do **complementar** é uma consequência da regra da adição.
- ▶ Se A^c é o complemento do evento A :

$$P(A) = 1 - P(A^c).$$

Exemplo

Considere que foi coletada uma amostra de animais. Cada um destes animais foi categorizado de acordo com o sexo (macho ou fêmea) e com a espécie (A, B ou C). Os dados estão na tabela.

	A	B	C	Soma
Fêmea	74	92	78	244
Macho	100	84	72	256
Soma	174	176	150	500

Exemplo

1. Defina os eventos.
2. Qual a probabilidade de escolhermos ao acaso uma fêmea?
3. Qual a probabilidade de escolhermos ao acaso um macho?
4. Qual a probabilidade de escolhermos ao acaso um animal da espécie A?
5. Qual a probabilidade de escolhermos ao acaso um animal da espécie B?
6. Qual a probabilidade de escolhermos ao acaso um animal da espécie C?
7. Qual a probabilidade de escolhermos ao acaso um macho ou uma fêmea?

Exemplo

1. Defina os eventos.

- ▶ F : ser fêmea.
- ▶ M : ser macho.
- ▶ A : ser da espécie A.
- ▶ B : ser da espécie B.
- ▶ C : ser da espécie C.

Exemplo

- Qual a probabilidade de escolhermos ao acaso uma fêmea?
 - ▶ $P(F) = 0,488$
- Qual a probabilidade de escolhermos ao acaso um macho?
 - ▶ $P(M) = 0,512$
- Qual a probabilidade de escolhermos ao acaso um animal da espécie A?
 - ▶ $P(A) = 0,348$
- Qual a probabilidade de escolhermos ao acaso um animal da espécie B?
 - ▶ $P(B) = 0,352$
- Qual a probabilidade de escolhermos ao acaso um animal da espécie C?
 - ▶ $P(C) = 0,3$
- Qual a probabilidade de escolhermos ao acaso um macho ou uma fêmea?
 - ▶ $P(M \cup F) = 1$

Exemplo

8. Qual a probabilidade de escolhermos um animal da espécie A ou da espécie B?
9. Qual a probabilidade de escolhermos um animal da espécie A ou da espécie C?
10. Qual a probabilidade de escolhermos um animal da espécie B ou da espécie C?
11. Qual a probabilidade de escolhermos um animal da espécie A ou B ou C?

Exemplo

8. Qual a probabilidade de escolhermos um animal da espécie A ou da espécie B?

$$\blacktriangleright P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,7$$

9. Qual a probabilidade de escolhermos um animal da espécie A ou da espécie C?

$$\blacktriangleright P(A \cup C) = P(A) + P(C) - P(A \cap C) = 0,648$$

10. Qual a probabilidade de escolhermos um animal da espécie B ou da espécie C?

$$\blacktriangleright P(B \cup C) = P(B) + P(C) - P(B \cap C) = 0,652$$

11. Qual a probabilidade de escolhermos um animal da espécie A ou B ou C?

$$\blacktriangleright P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) = 1$$

Exemplo

12. Qual a probabilidade de escolhermos uma fêmea ou um animal da espécie A?
13. Qual a probabilidade de escolhermos uma fêmea ou um animal da espécie B?
14. Qual a probabilidade de escolhermos uma fêmea ou um animal da espécie C?
15. Qual a probabilidade de escolhermos um macho ou um animal da espécie A?
16. Qual a probabilidade de escolhermos um macho ou um animal da espécie B?
17. Qual a probabilidade de escolhermos um macho ou um animal da espécie C?

Exemplo

12. Qual a probabilidade de escolhermos uma fêmea ou um animal da espécie A?

$$\blacktriangleright P(F \cup A) = P(F) + P(A) - P(F \cap A) = 0,688$$

13. Qual a probabilidade de escolhermos uma fêmea ou um animal da espécie B?

$$\blacktriangleright P(F \cup B) = P(F) + P(B) - P(F \cap B) = 0,656$$

14. Qual a probabilidade de escolhermos uma fêmea ou um animal da espécie C?

$$\blacktriangleright P(F \cup C) = P(F) + P(C) - P(F \cap C) = 0,632$$

15. Qual a probabilidade de escolhermos um macho ou um animal da espécie A?

$$\blacktriangleright P(M \cup A) = P(M) + P(A) - P(M \cap A) = 0,66$$

16. Qual a probabilidade de escolhermos um macho ou um animal da espécie B?

$$\blacktriangleright P(M \cup B) = P(M) + P(B) - P(M \cap B) = 0,696$$

17. Qual a probabilidade de escolhermos um macho ou um animal da espécie C?

$$\blacktriangleright P(M \cup C) = P(M) + P(C) - P(M \cap C) = 0,668$$



Probabilidade condicional

Probabilidade condicional

- ▶ Em muitas situações, o fenômeno de interesse pode ser separado em **etapas**.
- ▶ A informação do que ocorreu em uma etapa pode influenciar nas etapas seguintes.
- ▶ Nestas situações há um **ganho de informação** e pode-se **recalcular as probabilidades**.
- ▶ Estas probabilidades são as chamadas **probabilidades condicionais**.

Probabilidade condicional

- ▶ Considere dois eventos denotados por A e B .
- ▶ A probabilidade de A dado que B ocorreu é representada por $P(A|B)$.
- ▶ Se $P(B)$ for maior que 0:
 - ▶ Se $P(B)$ for igual a 0:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$P(A|B) = P(A)$$



Regra do produto

Regra do produto

- ▶ A regra do **produto** é um resultado das regras de probabilidade condicional.
- ▶ Consiste em **isolar a interseção**.

$$P(A \cap B) = P(A|B) \times P(B).$$

Exemplo

Retomando o exemplo da amostra de animais.

	A	B	C	Soma
Fêmea	74	92	78	244
Macho	100	84	72	256
Soma	174	176	150	500

Definindo os eventos:

- ▶ F : ser fêmea.
- ▶ M : ser macho.
- ▶ A : ser da espécie A.
- ▶ B : ser da espécie B.
- ▶ C : ser da espécie C.

Exemplo

18. Sabendo que é uma fêmea, qual a probabilidade de ser da espécie A?
19. Sabendo que é uma fêmea, qual a probabilidade de ser da espécie B?
20. Sabendo que é uma fêmea, qual a probabilidade de ser da espécie C?
21. Sabendo que é um macho, qual a probabilidade de ser da espécie A?
22. Sabendo que é um macho, qual a probabilidade de ser da espécie B?
23. Sabendo que é um macho, qual a probabilidade de ser da espécie C?

Exemplo

18. Sabendo que é uma fêmea, qual a probabilidade de ser da espécie A?

$$\blacktriangleright P(A|F) = \frac{P(A \cap F)}{P(F)} = 0,303$$

19. Sabendo que é uma fêmea, qual a probabilidade de ser da espécie B?

$$\blacktriangleright P(B|F) = \frac{P(B \cap F)}{P(F)} = 0,377$$

20. Sabendo que é uma fêmea, qual a probabilidade de ser da espécie C?

$$\blacktriangleright P(C|F) = \frac{P(C \cap F)}{P(F)} = 0,319$$

21. Sabendo que é um macho, qual a probabilidade de ser da espécie A?

$$\blacktriangleright P(A|M) = \frac{P(A \cap M)}{P(M)} = 0,391$$

22. Sabendo que é um macho, qual a probabilidade de ser da espécie B?

$$\blacktriangleright P(B|M) = \frac{P(B \cap M)}{P(M)} = 0,328$$

23. Sabendo que é um macho, qual a probabilidade de ser da espécie C?

$$\blacktriangleright P(C|M) = \frac{P(C \cap M)}{P(M)} = 0,281$$

Exemplo

24. Sabendo que é da espécie A, qual a probabilidade de ser uma fêmea?
25. Sabendo que é da espécie B, qual a probabilidade de ser uma fêmea?
26. Sabendo que é da espécie C, qual a probabilidade de ser uma fêmea?
27. Sabendo que é da espécie A, qual a probabilidade de ser um macho?
28. Sabendo que é da espécie B, qual a probabilidade de ser um macho?
29. Sabendo que é da espécie C, qual a probabilidade de ser um macho?

Exemplo

24. Sabendo que é da espécie A, qual a probabilidade de ser uma fêmea?

$$\blacktriangleright P(F|A) = \frac{P(F \cap A)}{P(A)} = 0,425$$

25. Sabendo que é da espécie B, qual a probabilidade de ser uma fêmea?

$$\blacktriangleright P(F|B) = \frac{P(F \cap B)}{P(B)} = 0,522$$

26. Sabendo que é da espécie C, qual a probabilidade de ser uma fêmea?

$$\blacktriangleright P(F|C) = \frac{P(F \cap C)}{P(C)} = 0,52$$

27. Sabendo que é da espécie A, qual a probabilidade de ser um macho?

$$\blacktriangleright P(M|A) = \frac{P(M \cap A)}{P(A)} = 0,574$$

28. Sabendo que é da espécie B, qual a probabilidade de ser um macho?

$$\blacktriangleright P(M|B) = \frac{P(M \cap B)}{P(B)} = 0,477$$

29. Sabendo que é da espécie C, qual a probabilidade de ser um macho?

$$\blacktriangleright P(M|C) = \frac{P(M \cap C)}{P(C)} = 0,48$$

Exemplo

30. Qual a probabilidade de ser uma fêmea e da espécie A?
31. Qual a probabilidade de ser uma fêmea e da espécie B?
32. Qual a probabilidade de ser uma fêmea e da espécie C?
33. Qual a probabilidade de ser uma macho e da espécie A?
34. Qual a probabilidade de ser uma macho e da espécie B?
35. Qual a probabilidade de ser uma macho e da espécie C?

Exemplo

30. Qual a probabilidade de ser uma fêmea e da espécie A?
- ▶ $P(F \cap A) = P(F|A) \times P(A) = 0,148$
31. Qual a probabilidade de ser uma fêmea e da espécie B?
- ▶ $P(F \cap B) = P(F|B) \times P(B) = 0,184$
32. Qual a probabilidade de ser uma fêmea e da espécie C?
- ▶ $P(F \cap C) = P(F|C) \times P(C) = 0,156$
33. Qual a probabilidade de ser um macho e da espécie A?
- ▶ $P(M \cap A) = P(M|A) \times P(A) = 0,2$
34. Qual a probabilidade de ser um macho e da espécie B?
- ▶ $P(M \cap B) = P(M|B) \times P(B) = 0,168$
35. Qual a probabilidade de ser um macho e da espécie C?
- ▶ $P(M \cap C) = P(M|C) \times P(C) = 0,144$



Independência

Independência

- ▶ Em alguns casos, saber que B ocorreu fornece informação sobre a ocorrência de A .
- ▶ Em outros casos saber que o evento B ocorreu não tem qualquer interferência na ocorrência ou não de A .
- ▶ Nestes casos, podemos dizer que os eventos A e B são **independentes**.
- ▶ Em outros termos: os eventos A e B são independentes se a ocorrência de um **não altera** a probabilidade de ocorrência do outro.

Independência

- ▶ Em termos de probabilidades condicionais:

$$P(A|B) = P(A) \quad \text{e} \quad P(B|A) = P(B)$$

- ▶ Em outras palavras: a probabilidade de interseção de eventos independentes é igual ao produto das probabilidades.

- ▶ Com este resultado e a regra do produto:

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

Eventos independentes

36. No exemplo dos animais calculamos diversas probabilidades condicionais. O que podemos concluir a respeito da independência das variáveis?

- ▶ $P(A|F) = P(A)$ e $P(F|A) = P(F)$?
- ▶ $P(B|F) = P(B)$ e $P(F|B) = P(F)$?
- ▶ $P(C|F) = P(C)$ e $P(F|C) = P(F)$?
- ▶ $P(A|M) = P(A)$ e $P(M|A) = P(M)$?
- ▶ $P(B|M) = P(B)$ e $P(M|B) = P(M)$?
- ▶ $P(C|M) = P(C)$ e $P(M|C) = P(M)$?

Eventos independentes x eventos mutuamente exclusivos

- ▶ É comum haver desentendimentos entre os conceitos de eventos **mutuamente exclusivos** e eventos **independentes**.
- ▶ Eventos mutuamente exclusivos são aqueles que não podem ocorrer ao mesmo tempo.
- ▶ Eventos independentes ocorrem quando a ocorrência de um não afeta a ocorrência de outro.

Exemplo

Considere o lançamento de um dado e os seguintes eventos: A: face par e B: face menor ou igual a 4.

- a) Os eventos são mutuamente exclusivos?
- b) Os eventos são independentes?

Exemplo

$$\text{a) } A = \{2,4,6\} \quad B = \{1,2,3,4\} \quad A \cap B = \{2,4\}$$

b)

Forma 1

- ▶ $P(A) = 1/2, P(A|B) = \frac{2/6}{4/6} = 1/2.$
- ▶ $P(B) = 2/3, P(B|A) = \frac{2/6}{3/6} = 2/3.$
- ▶ $P(A) = P(A|B)$ e $P(B) = P(B|A).$

Forma 2

- ▶ $P(A \cap B) = 1/3.$
- ▶ $P(A) \times P(B) = 1/2 \times 2/3 = 1/3.$
- ▶ $P(A \cap B) = P(A) \times P(B).$

Conclusão: A e B são independentes, saber que A ocorreu não altera a probabilidade de B e vice-versa. Contudo são eventos que não são disjuntos, já que existe interseção diferente do vazio entre A e B .

O que foi visto:

- ▶ Operações com probabilidades.
 - ▶ Regra da adição.
 - ▶ Regra do complementar.
 - ▶ Probabilidade condicional.
 - ▶ Regra do produto.
 - ▶ Independência.

Próximos assuntos:

- ▶ Partição do espaço amostral.
- ▶ Teorema da probabilidade total.
- ▶ Teorema de Bayes.