Exercícios
Testes de hipóteses

Os exercícios foram extraídos dos livros:

Bussab, WO; Morettin, PA. Estatística Básica. São Paulo: Editora Saraiva, 2006 (5ª Edição).

Magalhães, MN; Lima, ACP. Noções de Probabilidade e Estatística. São Paulo: EDUSP, 2008.

1. O consumo médio de gasolina num certo tipo de automóvel é de 15 km por litro, segundo informações da montadora. Uma revista especializada verificou o consumo de 25 desses veículos, escolhidos ao acaso. Admita que o consumo siga o modelo Normal com variância igual a 9 (km por litro)^2.
   a) Formule o problema como um teste de hipótese para verificar a afirmação da montadora.
   b) Qual seria a região crítica se $\alpha = 0.06$? Encontre os valores de consumo médio de combustível que limitam a região crítica.
   c) Para uma amostra com $\bar{y} = 17$, o consumo difere ou não da afirmação da montadora? Justifique a sua resposta.

2. Uma máquina automática para encher pacotes de café enche-os segundo uma distribuição normal, com média μ e desvio padrão sempre igual a 20 gramas. A máquina foi regulada para $\mu = 500$ gramas. Periodicamente, coletamos uma amostra de 16 pacotes e verificamos se a produção está sob controle.
   a) Formule o problema como um teste de hipótese.
   b) Defina a região crítica se $\alpha = 0.01$.
   c) Se para a amostra coletada $\bar{y} = 492$ g, qual a conclusão a respeito da regulagem da máquina?

3. Uma máquina deve produzir peças com diâmetro de 2 centímetros. Entretanto, variações acontecem e vamos assumir que o diâmetro dessas peças siga o modelo Normal com variância igual a $0.09cm^2$. Para testar se a máquina está bem regulada, uma amostra de 100 peças é coletada.
   a) Formule o problema como um teste de hipótese.
   b) Qual seria a região crítica se $\alpha = 0.02$?
   c) Se para essa amostra $\bar{y} = 2.02$, qual a conclusão a respeito da regulagem da máquina?
   d) Suspeita-se que a máquina esteja produzindo peças com variabilidade acima do estabelecido $\sigma^2 = 0.09cm^2$. Uma nova amostra de 100 peças resultou num desvio-padrão amostral de $s = 0.33$. Estabeleça e teste ao nível de 10% de significância a hipótese adequada.

4. O atual tempo de travessia com balsas entre Santos e Guarujá é considerado uma variável aleatória com distribuição Normal de média 10 minutos e desvio padrão de 3 minutos. Uma nova balsa vai entrar em operação e desconfia-se que será mais lenta que as anteriores, isto é, haverá aumento na média especificada pelo modelo acima.
   a) Especifique as hipóteses em discussão.
   b) Interprete os erros tipo I e tipo II no contexto do problema.
   c) Para uma amostra de 20 tempos de travessia com a nova balsa, obtenha a região crítica considerando um nível de 5%.
   d) Calcule a probabilidade do erro tipo II, se a nova balsa demora, em média, 2 minutos a mais que as anteriores para completar a travessia. Depois calcule para 3 e 4 minutos a mais.

5. Suponha que queiramos testar $H_0 : \mu = 50$ versus $H_1 : \mu > 50$, onde μ é a média de uma variável aleatória Normal com desvio padrão igual a 10. Extraída uma amostra de $n = 36$ elementos da população, observou-se $\bar{y} = 53$. Faça o teste utilizando os níveis 1%, 2% 5% e 10%.

6. Um criador tem constatado uma proporção de 10% do rebanho com verminose. O veterinário alterou a dieta dos animais e acredita que a doença diminuiu de intensidade. Um exame em 100 cabeças do rebanho, escolhidas ao acaso, indicou 8 delas com verminose.
    a) Formule o problema como um teste de hipótese para verificar a afirmação do veterinário.
    b) Qual a região crítica se $\alpha = 0.08$? Encontre o(s) valor(es) de proporção que limita(m) a região crítica.
    c) Considere a amostra observada. A dieta proposta pelo veterinário tem efeito na redução da verminose do rebanho? Justifique a sua resposta.
7. Uma estação de televisão afirma que 60% dos televisores estavam ligados no seu programa especial da última segunda-feira. Uma rede competidora deseja contestar essa afirmação e decide usar uma amostra de 200 famílias para um teste.
    a) Formule o problema como um teste de hipótese para verificar a afirmação da estação de televisão.
    b) Qual a região crítica do teste para um nível de significância $\alpha = 5\%$?
    c) Admita que, com a pesquisa feita com as 200 pessoas, obtivemos 104 pessoas que estavam assistindo ao programa. O que podemos dizer a respeito da afirmação da estação de televisão?
    d) Calcule o p-valor do teste para o problema apresentado.
8. Um fabricante afirma que seus cigarros contêm não mais do que 30 mg de nicotina. Uma amostra de 25 cigarros fornece média de 31.5 mg e devio padrão de 3 mg.
    a) No nível de 5%, os dados refutam ou não a afirmação do fabricante?
    b) Calcule o p-valor do teste.
9. Os novos operários de uma empresa são treinados a operarem uma máquina, cujo tempo Y (em horas) de aprendizado é anotado. Observou-se que Y segue de perto a distribuição $N(25, 100)$. Uma nova técnica de ensino, que deve melhorar o tempo de aprendizado, foi testada em 16 novos empregados, os quais apresentaram 20.5 horas como tempo médio de aprendizado. Usando o p-valor, você diria que a nova técnica é melhor que a anterior?
10. O consumidor de um certo produto acusou o fabricante, dizendo que mais de 20% da unidades fabricadas apresentam defeito. Para embasar sua acusação, ele usou uma amostra de tamanho $n = 50$ na qual 27% eram defeituosas. Mostre se o fabricante poderia refutar a acusação com um teste estatístico de hipótese. Use um nível de significância de 10%.
11. Em um procedimento de avaliação um mesmo exame foi aplicado aos mesmos alunos quando estavam em períodos inicial e final de um curso. A variável D_i corresponde à diferença de notas de fim e início do curso. Faça um teste de comparação de médias adequado considerando nível de significância $\alpha = 0.05$.

Início	37	57	34	40	21	28	35	80	65	47	28	67
Fim	65	92	56	70	52	73	50	90	88	71	52	88
d_i	28	35	22	30	31	45	15	10	23	24	24	21

12. Dois tipos de plásticos, I e II, são adequados para uso na produção de certo componente eletrônico. A tensão de ruptura do material é uma característica importante. Sabe-se que $\sigma_I = \sigma_{II} = 1$ psi. Uma amostra aleatória com $n_I = 10$ e $n_{II} = 12$ fornece $\overline{y}_I = 162.5$ e $\overline{y}_{II} = 155.0$. Por razões de custo, a companhia não irá adotar o plástico I a menos que este tenha uma resistência média que exceda a do plástico II. Proceda um teste de hipótese adequado para saber se, baseando-se nas informações da amostra, a companhia deve adotar o plástico I (use $\alpha = 0.05$).
13. Um instituto de pesquisa está estudando a ocorrência de doenças na população de uma cidade. Os pesquisadores do instituto encontraram 200 registros de indivíduos com doenças, sendo 50 pessoas com a doença A, 70 com a doença B, 30 com a doença C e 50 com a doença D. Cada doença ocorre em apenas uma única pessoa e os pesquisadores assumiram que os registros são uma amostra aleatória da população de indivíduos com doenças. Estime a proporção de indivíduos com os diferentes tipos de doenças e faça um teste adequado para verificar se a proporção é a mesma. Considere nível de significância $\alpha = 0.05$.
14. Numa pesquisa de possuidores de carros numa universidade, entre homens e mulheres, foram obtidos: 24 de 100 homens possuem automóveis e 13 de 100 mulheres possuem automóveis. Baseado nestes resultados você

afirmaria que a proporção de homens e mulheres que possuem carros é a mesma na população? Conduza um teste de hipótese adequado, considerando um nível de significância de 5%.

15. Um experimento foi feito para comparar os custos de reparo de dois tipos de bombas (A e B). Para isto registrou-se o custo para 16 bombas de cada tipo, ao longo de um ano de operação. Os custos anuais de reparo (em milhares de reais) foram os seguintes:

Tipo A	0.4	1.8	4.0	1.8	2.3	1.9	0.8	1.4
	3.4	1.0	2.0	0.5	1.6	3.9	1.6	1.8
Tipo B	1.2	0.8	2.7	0.8	0.5	1.1	0.7	1.3
	0.9	3.9	1.4	2.6	0.6	0.6	1.5	2.0

Faça um teste de hipótese adequado com nível de significância $\alpha = 0.05$ para comparar os custos de reparo das duas bombas. Considere as seguintes informações:

$$\begin{cases} \bar{y}_A = 1.888 \quad \text{e} \quad s_A^2 = 1.168 \quad \text{e} \quad n_A = 16 \\ \bar{y}_B = 1.413 \quad \text{e} \quad s_B^2 = 0.896 \quad \text{e} \quad n_B = 16 \end{cases}$$

16. Duas técnicas de venda são aplicadas por dois grupos de vendedores: a técnica A por 12 vendedores, a técnica B por 15 vendedores. Espera-se que a técnica B produza melhores resultados. No final de um mês, obtiveram-se os resultados a seguir:

$$\begin{cases} \bar{y}_A = 68 \quad \text{e} \quad s_A^2 = 50 \quad \text{e} \quad n_A = 12 \\ \bar{y}_B = 76 \quad \text{e} \quad s_B^2 = 52 \quad \text{e} \quad n_B = 15 \end{cases}$$

Vamos testar, para o nível de significância de 5%, se há diferenças significativas entre as vendas médias resultantes das duas técnicas. Supondo que as vendas sejam normalmente distribuídas, faça um teste para igualdade de variâncias e depois para a média populacional.

17. Queremos testar igualdade das resistências médias de dois tipos de vigas de aço, A e B. Tomando-se $n_A = 15$ vigas do tipo A e $n_B = 20$ vigas do tipo B, obtemos os valores dados a seguir.

$$\begin{cases} \bar{y}_A = 70.5 \quad \text{e} \quad s_A^2 = 81.6 \quad \text{e} \quad n_A = 15 \\ \bar{y}_B = 84.5 \quad \text{e} \quad s_B^2 = 210.8 \quad \text{e} \quad n_B = 20 \end{cases}$$

Conduza um teste de hipótese adequado, considerando nível de significância de 10%.

18. Uma prova básica de Estatística foi aplicada a 100 alunos de Ciências Humanas e a 100 alunos de Ciências Biológicas. As notas são classificadas segundo os graus A, B, C, D e E (em que D significa que o aluno não recebe créditos e E indica que o aluno foi reprovado). Os resultados estão apresentados na Tabela a seguir. Faça um teste adequado para testar se as distribuições das notas, para as diversas classes, são as mesmas para os dois grupos de alunos. Considere nível de significância $\alpha = 0.05$.

Aluno de	Grau					Total
	A	B	C	D	E	
C. Humanas	15	20	30	20	15	100
C. Biológicas	8	23	18	34	17	100
Total	23	43	48	54	32	200
Média	11.5	21.5	24.0	27.0	16.0	200

19. Deseja-se estudar a tolerância de um equipamento eletrônico ao número de impactos termoelétricos. Pelas características de fabricação do equipamento, é possível admitir que a probabilidade de falha seja constante, isto é, após cada impacto, existe uma probabilidade p de que ele falhe. Assim, Y é a variável aleatória número de impactos anteriores à falha. Uma amostra de 80 ensaios foi obtida, em que cada ensaio representa os testes feitos até a interrupção por falha no equipamento, resultando em 80 observações da variável de interesse. Na tabela a seguir, apresentamos as frequências esperadas e os valores que foram observados no teste de resistência realizado. Pretende-se verificar se o modelo geométrico com $p = 0.4$ é adequado ao nível de significância $\alpha = 0.05$.

Impactos (k)	0	1	2	3	4	Mais que 4
Freq. observada (n_i)	30	26	10	5	5	4
Freq. esperada ($E(n_i)$)	32.0	19.2	11.5	6.9	4.1	6.3

Como a categoria correspondente ao valor 4 tem frequência esperada igual a 4.1, que é menor que 5, é recomendado agregar as últimas duas categorias formando a dos maiores do que 3, a qual terá frequência observada 9 e esperada de 10.4.

20. Queremos testar se existe ou não correlação entre o número de clientes e os anos de experiência de agentes de seguros. Sorteamos cinco agentes e observamos as duas variáveis. Qual seria a conclusão ao nível de 10% de significância baseada nos dados a seguir?

Agente	A	B	C	D	E
Anos de Experiência	2	4	5	6	8
Número de Clientes	48	56	64	60	72

Respostas

1.

a) Hipóteses estabelecidas:

$$\begin{cases} H_0 : \mu = 15 \\ H_a : \mu \neq 15 \quad \text{(teste bilateral)} \end{cases}$$

b) Região crítica na escala da variável resposta y:

$$z_c = \frac{\bar{y}_c - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \quad \rightarrow \quad \bar{y}_c = \mu + z_c \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$\bar{y}_{c1} = 15 - 1.88 \frac{3}{\sqrt{25}} = 13.87$$

$$\bar{y}_{c2} = 15 + 1.88 \frac{3}{\sqrt{25}} = 16.13$$

A região crítica na escala de y é dada por $RC = \{\bar{y} \in \mathbb{R} | \bar{y} < 13.87 \text{ ou } \bar{y} > 16.13\}$.

Equivalentemente, a região crítica na escala da estatística de teste com $\alpha = 0.06$ é dada por $RC = \{z < -z_{0.03} = -1.88 \text{ ou } z > z_{0.03} = 1.88\}$.

c) O consumo difere, pois a média observada pertence a região crítica. Logo, rejeita-se a hipótese nula de que o consumo de combustível é de 15 km por litro, ao nível de significância de 6%.

De maneira equivalente, podemos calcular a estatística de teste

$$z = \frac{\bar{y} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{17 - 15}{3/\sqrt{25}} = 3.33$$

Como $z = 3.33$ pertence à região crítica na escala da estatística de teste, então rejeita-se a hipótese nula ao nível de significância de 6%.

2.

a) Hipóteses estabelecidas:

$$\begin{cases} H_0 : \mu = 500 \\ H_a : \mu \neq 500 \quad \text{(teste bilateral)} \end{cases}$$

b) Região crítica na escala da variável resposta y:

$$z_c = \frac{\bar{y}_c - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \quad \rightarrow \quad \bar{y}_c = \mu + z_c \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$\bar{y}_{c1} = 500 - 2.58 \frac{20}{\sqrt{16}} = 487.10$$

$$\bar{y}_{c2} = 500 + 2.58 \frac{20}{\sqrt{16}} = 512.90$$

A região crítica é dada por $RC = \{\bar{y} \in \mathbb{R} | \bar{y} < 487.10 \text{ ou } \bar{y} > 512.90\}$.

Equivalentemente, a região crítica na escala da estatística de teste com $\alpha = 0.01$ é dada por $RC = \{z < -z_{0.005} = -2.58 \text{ ou } z > z_{0.005} = 2.58\}$.

c) Não rejeitamos a hipótese nula de que a máquina está produzindo pacotes com peso médio de 500 g, ao nível de significância de 1%.

De maneira equivalente, podemos calcular a estatística de teste

$$z = \frac{\bar{y} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{492 - 500}{20/\sqrt{16}} = -1.6$$

Como $z = -1.6$ não pertence à região crítica na escala da estatística de teste, então não podemos rejeitar a hipótese nula ao nível de significância de 1%.

3.

a) Hipóteses estabelecidas:

$$\begin{cases} H_0 : \mu = 2 \\ H_a : \mu \neq 2 \quad \text{(teste bilateral)} \end{cases}$$

b) Região crítica na escala da variável resposta y:

$$z_c = \frac{\bar{y}_c - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \quad \rightarrow \quad \bar{y}_c = \mu + z_c \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$\bar{y}_{c1} = 2 - 2.33 \frac{0.3}{\sqrt{100}} = 1.93$$

$$\bar{y}_{c2} = 2 + 2.33 \frac{0.3}{\sqrt{100}} = 2.07$$

A região crítica na escala de y é dada por $RC = \{\bar{y} \in \mathbb{R} | \bar{y} < 1.93 \text{ ou } \bar{y} > 2.07\}$.

A região crítica na escala da estatística de teste com $\alpha = 0.02$ é dada por $RC = \{z < -z_{0.01} = -2.33 \text{ ou } z > z_{0.01} = 2.33\}$.

c) Não rejeitamos a hipótese nula de que a máquina está regulada e produzindo peças dentro do padrão desejado, ao nível de significância de 2%.

Alternativamente, podemos calcular a estatística de teste

$$z = \frac{\bar{y} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{2.02 - 2}{\sqrt{0.09/100}} = 0.67$$

Como $z = 0.67$ não pertence à região crítica na escala da estatística de teste, então não podemos rejeitar a hipótese nula ao nível de significância de 2%.

d)

- Hipóteses estabelecidas:

$$\begin{cases} H_0 : \sigma^2 = 0.09 \\ H_a : \sigma^2 > 0.09 \quad \text{(teste unilateral)} \end{cases}$$

- Região crítica para $\alpha = 0.1$ na escala da estatística de teste: $RC = \{\chi^2 > \chi^2_{0.1,99} = 117.41\}$.
- Estatística de teste:

$$\chi^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} = \frac{99 \cdot 0.33^2}{0.09} = 119.79$$

- Conclusão: Como $\chi^2 = 119.79$ pertence à região crítica, rejeitamos a hipótese nula de que a máquina está regulada e produzindo peças com variabilidade dentro do padrão desejado, ao nível de 10% de significância.

4.

a) Hipóteses estabelecidas:

$$\begin{cases} H_0 : \mu = 10 \\ H_a : \mu > 10 \quad \text{(teste unilateral)} \end{cases}$$

b) Erro Tipo I: rejeitar $H_0|H_0\,V$, ou seja, não rejeitar que a média de tempo para travessia aumentou, mas na verdade continua com média de 10 minutos. Erro Tipo II: não rejeitar $H_0|H_0\,F$, ou seja, não rejeitar que a média de tempo para travessia não aumentou, ($\mu = 10$), mas na verdade ela aumentou.

c)

$$z_c = \frac{\bar{y}_c - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \quad \rightarrow \quad \bar{y}_c = \mu + z_c\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$\begin{aligned}\bar{y}_{c1} &= 10 + 1.64\frac{3}{\sqrt{20}} = \\ &= 11.10.\end{aligned}$$

A região crítica é dada por $RC = \{\bar{y} \in \mathbb{R} | \bar{y} > 11.10\}$.

Já a região crítica na escala da estatística de teste com $\alpha = 5\%$ é dada por $RC = \{z > z_{0.05} = 1.64\}$

d)

$$\begin{aligned}\beta(12) &= P(\text{erro tipo II}) \\ &= P(\text{não rejeitar } H_0|H_0 \text{ falsa}) \\ &= P(\bar{Y} \leq 11.10|\mu = 12.0) \\ &= P\left(\frac{\bar{Y} - 12}{\sqrt{3^2/20}} \leq \frac{11.10 - 12}{\sqrt{3^2/20}}\right) \\ &= P(Z \leq -1.34) \\ &= 0.090.\end{aligned}$$

Assim, em sendo $\mu = 12.0$ estaríamos concluindo de forma equivocada que H_0 não deveria ser rejeitada, com probabilidade de 0.090. Para 3 e 4 minutos a mais, temos que a probabilidade é 0.002 e ≈ 0, respectivamente.

---

5. Sabemos que $\bar{Y} \sim N(\mu, 10^2/36)$.

- Para 1%:

$$z_c = \frac{\bar{y}_c - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \quad \rightarrow \quad \bar{y}_c = \mu + z_c\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$\begin{aligned}\bar{y}_c &= 50 + 2.33\frac{10}{\sqrt{36}} = \\ &= 53.88.\end{aligned}$$

- Para 2%:

$$\begin{aligned}\bar{y}_c &= 50 + 2.06\frac{10}{\sqrt{36}} = \\ &= 53.43.\end{aligned}$$

- Para 5%:

$$\begin{aligned}\bar{y}_c &= 50 + 1.64\frac{10}{\sqrt{36}} = \\ &= 52.73.\end{aligned}$$

- Para 10%:

$$\begin{aligned}\bar{y}_c &= 50 + 1.28\frac{10}{\sqrt{36}} = \\ &= 52.13.\end{aligned}$$

Nos níveis de 1% e 2% não rejeitamos, mas rejeitamos nos níveis de 5% e 10%.

Resolvendo a questão na escala da estatística de teste, temos que a região crítica é dada por $RC = \{z > z_\alpha\}$, em que para $\alpha = 0.01$, $z_{0.01} = 2.33$; $\alpha = 0.02$, $z_{0.02} = 2.05$; $\alpha = 0.05$, $z_{0.05} = 1.64$ e $\alpha = 0.1$, $z_{0.1} = 1.28$.

A estatística de teste é

$$z = \frac{53 - 50}{10/\sqrt{36}} = 1.8,$$

portanto, $z = 1.8$ pertence às regiões críticas com níveis de significância de 5% e 10%, então rejeitamos H_0 à esses níveis.

---

6. Sabemos que $\hat{p} \sim N(p, \frac{p(1-p)}{n})$.

a) Hipóteses estabelecidas:

$$\begin{cases} H_0 : p = 0.10 \\ H_1 : p < 0.10 \quad \text{(teste unilateral)} \end{cases}$$

b) Região crítica na escala de $\hat{p}$:

$$z_c = \frac{\hat{p}_c - p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} \quad \rightarrow \quad \hat{p}_c = p - z_c\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$$

$$\hat{p}_c = 0.10 - 1.41\sqrt{\frac{0.10(1-0.10)}{100}} = 0.058.$$

A região crítica na escala de $\hat{p}$ é dada por $RC = \{\hat{p} \in [0,1] | \hat{p} < 0.058\}$.

Equivalentemente, a região crítica na escala da estatística de teste com $\alpha = 0.08$ é dada por $RC = \{z < -z_{0.08} = -1.41\}$.

A estatística de teste é

$$z = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{100}}} = \frac{0.08 - 0.1}{\sqrt{\frac{0.1 \cdot 0.9}{100}}} = -0.67$$

c) Note que é necessário calcular a proporção amostral de animais com verminose como $\hat{p} = \frac{8}{100} = 0.08$. Não há evidência suficiente para afirmar que a incidência diminuiu, uma vez que o valor de proporção observado na amostra $\hat{p} = 0.08$ não está dentro da região de rejeição da hipótese nula.

Na escala da estatística de teste temos que $z = -0.67$ não pertence à região crítica e portanto, ao nível de significância de 8%, não há evidência suficiente para afirmar que a incidência diminuiu.

---

7. Sabemos que $\hat{p} \sim N(p, \frac{p(1-p)}{n})$.

a) Hipóteses estabelecidas:

$$\begin{cases} H_0 : p = 0.60 \\ H_1 : p < 0.60 \quad \text{(teste unilateral)} \end{cases}$$

b) Região crítica na escala de $\hat{p}$:

$$z_c = \frac{\hat{p}_c - p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} \quad \rightarrow \quad \hat{p}_c = p + z_c\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$$

$$\hat{p}_c = 0.60 - 1.64\sqrt{\frac{0,60(1-0.60)}{200}} = 0.54.$$

A região crítica é dada por $RC = \{\hat{p} \in [0,1] | \hat{p} < 0.54\}$.

A região crítica para $\alpha = 0.05$ na escala da estatística de teste é $RC = \{z < -z_{0.05} = -1.64\}$.

c) Na amostra de tamanho $n = 200$, temos que $\hat{p} = \frac{104}{200} = 0.52$. Assim, podemos notar que $0.52 \in RC$. Portanto, somos levados a rejeitar a hipótese nula. Isto é, há evidências de que a ausência do programa de segunda-feira não foi de 60%, mas inferior a esse número.

A estatística de teste é

$$z = \frac{104/200 - 0.6}{\sqrt{\frac{0.6 \cdot 0.4}{200}}} = -2.31$$

Assim, $z \in RC$ na escala da estatística de teste, e portanto podemos rejeitar a hipótese nula, ao nível de 5% de significância.

d) Os passos para calcular o p-valor são parecidos com aqueles já apresentados, mas a principal diferença está em não construir a região crítica. O que fazemos é apresentar a probabilidade de ocorrer valores da estatística mais extremos do que o observado, sob a hipótese nula ser verdadeira. Portanto,

$$\begin{aligned} P(\hat{p} < 0.52 | p = 0.60) &= P\left(Z < \frac{0.52 - 0.60}{\sqrt{\frac{0.60(1-0.60)}{200}}}\right) \\ &= P(Z < -2.30) \\ &= 0.01 = 1\%. \end{aligned}$$

8.

a) Note que foi obtida uma amostra de tamanho 25, onde a média ($\overline{y}$) e o desvio padrão (s) amostral foram calculados. Assim, a variável padronizada segue uma distribuição t com $n - 1$ graus de liberdade. Isso quer dizer que

$$t = \frac{\overline{y} - \mu}{s/\sqrt{n}} \sim t_{n-1}.$$

As hipóteses estabelecidas são

$$\begin{cases} H_0 : \mu = 30 \\ H_1 : \mu > 30 \quad \text{(teste unilateral)} \end{cases}$$

Por ser um teste unilateral, devemos procurar o valor de t_c tal que

$$P(T > t_c) = 0.05.$$

A partir da tabela t de Student, obtemos que $t_c = 1.711$. Isso quer dizer que a região crítica para a estatística t é $RC = \{t > 1.711\}$. O valor observado da estatística é

$$\begin{aligned} t &= \frac{31.5 - 30}{3/\sqrt{25}} \\ &= 2.5. \end{aligned}$$

Como t pertence à região crítica, rejeitamos H_0, ou seja, há evidências de que os cigarros contêm mais de 30 g de nicotina.

b) Para calcular o p-valor, considere que

$$\begin{aligned} p - valor &= P(T > t | H_0) = P(T > 2.5 | H_0) \\ &= 0.01 \end{aligned}$$

O $p - valor$ obtido está abaixo do nível de significância de 0.05 e portanto leva à rejeição de H_0.

---

9. Considerando que $\bar{Y} \sim N(25, 100/16)$.

As hipóteses estabelecidas são

$$\begin{cases} H_0 : \mu = 25 \\ H_1 : \mu < 25 \quad \text{(teste unilateral)} \end{cases}$$

Para calcular o p-valor, considere que a variância dada é populacional. Então,

$$\begin{aligned} p - valor &= P(Z < z) \\ &= P\left(\frac{\bar{Y} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} < \frac{20.5 - 25}{10/\sqrt{16}}\right) \\ &= P(Z < -1.8) \\ &= 0.036 \end{aligned}$$

Se adotarmos um nível de significância $\alpha = 0.05$, como o p-valor é menor do que α então podemos rejeitar a hipótese nula e concluir que a nova técnica reduz o tempo médio de aprendizado ao nível de significância de $\alpha = 5\%$. Se, no entanto, adotássemos um nível de 1% não poderíamos rejeitar H_0.

10.

$$\begin{aligned} &\text{População:} \\ &\qquad Y : \text{presença de defeito (0 - não, 1 - sim)} \\ &\qquad Y : B(p) \\ &\text{Amostra:} \\ &\qquad n = 50 \\ &\qquad \hat{p} = \sum_{i=1}^{50} y_i = 0.27 \\ &\text{Teste de hipótese:} \\ &\qquad H_0 : p = 0.20 \; vs \; H_1 : p > 0.20 \quad \text{(teste unilateral)} \\ &\qquad \alpha = 0.10 \to z_c = 1.28 \\ &\qquad z = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}} = \frac{0.27 - 0.20}{\sqrt{\frac{0.20(1-0.20)}{50}}} = 1.24. \end{aligned}$$

Conclusão: Como $z < z_c$, ou, equivalentemente como o p-valor é 0.108, então não se rejeita H_0 ao nível de 10% de significância, ou seja, não há evidência suficiente na amostra para acusar o fabricante.

11.

$$\begin{aligned} H_0 :& \mu_{fim} = \mu_{inicio} \;\; (d = 0) \text{ vs } H1 : \mu_{fim} \neq \mu_{inicio} \;\; (d > 0) \\ \alpha &= 0.05 \\ \bar{d} &= 25.7 \text{ e } S_d^2 = 83.7 \\ t &= \frac{25.7 - 0}{\sqrt{83.7/12}} \\ &= 9.72 \\ RC :& \{t = 9.72 > t_c = 1.796\} \\ t &\in RC. \end{aligned}$$

Rejeita-se H_0, ou seja, rejeita-se que a diferença das notas seja nula e considera-se que houve um aumento nas notas.

12.

- $H_0 : \mu_I - \mu_{II} = 0$ versus $H_1 : \mu_I - \mu_{II} > 0$

- $z = \frac{(\overline{y}_I - \overline{y}_{II})}{\sqrt{(\sigma^2_I/n_I)+(\sigma^2_{II}/n_{II})}} = \frac{(162.5-155)}{\sqrt{(1/10)+(1/12)}} = 17.52$
- $RC : \{z > z_c = 1.645\}$
- $p - valor = \alpha^* = P(Z > z) = P(Z > 17.52) \approx 0.$
- Rejeita H_0. Há evidências ($\alpha = 0.05$) de que a média do tipo I supera a do tipo II.

13.

- Proporção estimada de indivíduos com cada doença:

$$\overline{p}_A = \frac{50}{200} = 0.25; \quad \overline{p}_B = \frac{70}{200} = 0.35;$$
$$\overline{p}_C = \frac{30}{200} = 0.15; \quad \overline{p}_D = \frac{50}{200} = 0.25.$$

- Hipótese:

$$\begin{cases} H_0 : \text{a proporção é a mesma} : p_A = p_B = p_C = p_D \\ H_1 : \text{a proporção não é a mesma} \end{cases}$$

  Em termos práticos, as hipóteses sugerem que $np_{0i} = 50$ para qualquer i.

- Estatística de teste:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(n_i - E(n_i))^2}{E(n_i)} \sim \chi^2_{k-1}$$

- Região crítica:

$$RC = \{\chi^2 \in \Re^+ : \chi^2 > 7.815\}$$

- Cálculo da estatística de teste: Note que $E(n_i) = np_{0i}$. Então, para a doença A, temos que

$$E(n_i) = 200 \cdot 0.25 = 50.$$

  O procedimento é análogo para as demais doenças.

$$\begin{aligned} \chi^2 &= \frac{(50-50)^2}{50} + \frac{(70-50)^2}{50} + \frac{(30-50)^2}{50} + \frac{(50-50)^2}{50} \\ &= 16.00. \end{aligned}$$

- Conclusão: O valor tabelado de $\chi^2_3 = 7.815$, para $\alpha = 0.05$. Logo, $\chi^2 > \chi^2_3$, o que leva à rejeição de H_0, ou seja, a proporção de indivíduos com as doenças não é a mesma.

14.

- $H_0 : p_H = p_M$ versus $H_a : p_H \neq p_M$ (teste bilateral)
- Proporções

$$\hat{p}_H = \frac{24}{100} = 0.24 \text{ e } \hat{p}_M = \frac{13}{100} = 0.13$$
$$\bar{p} = \frac{24+13}{100+100} = \frac{37}{200} = 0.185$$

- Estatística de teste:

$$z = \frac{\hat{p}_H - \hat{p}_M}{\sqrt{\bar{p}(1-\bar{p})(\frac{1}{100} + \frac{1}{100})}} = \frac{0.24 - 0.13}{\sqrt{0.185(1-0.185)(\frac{1}{100} + \frac{1}{100})}} = 2.003.$$

- $\alpha = 0.05 \rightarrow RC = \{z < -1.96 \text{ ou } z > 1.96\}$.
- $p - valor = \alpha^* = P(Z < -z) + P(Z > z) = 0.045$.
- Rejeita-se H_0. Há evidências suficientes ($\alpha = 0.05$) de que as proporções populacionais de homens e mulheres com carro diferem.

---

15. Primeiro, vamos testar a igualdade das variâncias populacionais. No entanto, note que temos apenas as variâncias amostrais, denotadas por S_A^2 e S_B^2. Podemos formular as hipóteses da seguinte forma:

$$\begin{cases} H_0 : \sigma_A^2 = \sigma_B^2 \\ H_1 : \sigma_A^2 \neq \sigma_B^2 \end{cases}$$

Sob a suposição de H_0 ser verdadeira, temos que o valor calculado é $F = S_A^2/S_B^2 \sim F(n_A - 1, n_B - 1)$. Portanto,

$$\begin{aligned} F &= S_A^2/S_B^2 \\ &= 1.168/0.896 \\ &= 1.304. \end{aligned}$$

Considerando $\alpha = 0.05$, temos que os valores críticos da distribuição $F_{(15,15)}$ são $f_1 = 0.349$ e $f_2 = 2.862$, isto é, a região crítica é dada por $RC = \{f \in R^+ : f < 0.349 \cup f > 2.862\}$. Como F está fora da região crítica, não rejeitamos a hipótese nula de que as variâncias não diferem ao nível de significância de 5%.
Para ambas as populações, temos a mesma variância. Suponha que temos o interesse em testar as hipóteses

$$\begin{cases} H_0 : \mu_A = \mu_B \\ H_1 : \mu_A \neq \mu_B \end{cases}$$

A variância comum combinada é dada por

$$s_c^2 = \frac{(n_A - 1)s_A^2 + (n_B - 1)s_B^2}{(n_A - 1) + (n_B - 1)}.$$

Então,

$$\begin{aligned} t &= \frac{(\overline{y}_1 - \overline{y}_2) - (\mu_A - \mu_B)}{s_c\sqrt{1/n_A + 1/n_B}} \\ &= \frac{(1.888 - 1.413)}{1.016\sqrt{1/16 + 1/16}} \\ &= 1.322. \end{aligned}$$

Considerando que t possui uma distribuição t-Student com $n_A + n_B - 2$ graus de liberdade, a quantidade t_{tab} é obtida na tabela da distribuição t-Student. Então, fixando α, encontramos o valor de t_{tab} como $\alpha = P(t < -t_c \cup t > t_c | H_0)$, com região crítica dada por $RC = \{t \in \Re : t < -2.042 \text{ ou } t > 2.042\}$. Logo, concluimos que a hipótese H_0 não é rejeitada ao nível de significância de 5%, pois o valor t calculado não pertence à região crítica.

16.

- Teste de hipótese para variância populacional:

$$\begin{cases} H_0 : \sigma_A^2 = \sigma_B^2 \\ H_1 : \sigma_A^2 \neq \sigma_B^2 \end{cases}$$

Sob a suposição de H_0 ser verdadeira, temos que o valor calculado é $F = S_B^2/S_A^2 \sim F(n_B - 1, n_A - 1)$. Portanto,

$$\begin{aligned} F &= s_B^2/s_A^2 \\ &= 52/50 \\ &= 1.040. \end{aligned}$$

Considerando $\alpha = 0.05$, temos que os valores críticos da distribuição $F_{(14,11)}$ são $f_1 = 0.323$ e $f_2 = 3.359$, isto é, a região crítica é dada por $RC = \{f \in R^+ : f < 0.323 \cup f > 3.359\}$. Como F está fora da região crítica, não rejeitamos a hipótese nula de que as variâncias não diferem ao nível de significância de 5%.

- Teste de hipótese para média populacional:

$$\begin{cases} H_0 : \mu_A = \mu_B \\ H_1 : \mu_A < \mu_B \end{cases}$$

A variância comum combinada é dada por

$$\begin{aligned} s_c^2 &= \frac{(n_A - 1)s_A^2 + (n_B - 1)s_B^2}{(n_A - 1) + (n_B - 1)} \\ &= \frac{(12 - 1)50 + (15 - 1)52}{(12 - 1) + (15 - 1)} \\ &= 51.12. \end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned} t &= \frac{(\overline{y}_A - \overline{y}_B) - (\mu_A - \mu_B)}{S_c\sqrt{1/n_A + 1/n_B}} \\ &= \frac{(68 - 76)}{7.15\sqrt{1/12 + 1/15}} \\ &= -2.89. \end{aligned}$$

Considerando que t possui uma distribuição t-Student com $n_A + n_B - 2$ graus de liberdade, a quantidade t_c é obtida na tabela da distribuição t-Student. Então, fixando α, encontramos o valor de t_c como $\alpha = P(t < -t_c|H_0)$, com região crítica dada por $RC = \{t \in \Re : t < -1.708\}$. Logo, concluimos que a hipótese H_0 é rejeitada ao nível de significância de 5%, pois o valor t calculado pertence à região crítica.

17.

- Teste de hipótese para variância populacional:

$$\begin{cases} H_0 : \sigma_A^2 = \sigma_B^2 \\ H_1 : \sigma_A^2 \neq \sigma_B^2 \end{cases}$$

Sob a suposição de H_0 ser verdadeira, temos que o valor calculado é $F = S_B^2/S_A^2 \sim F(n_B - 1, n_A - 1)$. Portanto,

$$\begin{aligned} F &= s_B^2/s_A^2 \\ &= 210.8/81.6 \\ &= 2.583. \end{aligned}$$

Considerando $\alpha = 0.1$, temos que os valores críticos da distribuição $F_{(19,14)}$ são $f_1 = 0.443$ e $f_2 = 2.400$, isto é, a região crítica é dada por $RC = \{f \in R^+ : f < 0.443 \text{ ou } f > 2.400\}$. Como F está dentro da região crítica, rejeitamos a hipótese nula de que as variâncias não diferem ao nível de significância de 10%.

- Teste de hipótese para média populacional:

$$\begin{cases} H_0 : \mu_A = \mu_B \\ H_1 : \mu_A \neq \mu_B \end{cases}$$

$$\begin{aligned} t &= \frac{(\overline{y}_A - \overline{y}_B) - (\mu_A - \mu_B)}{\sqrt{s_A^2/n_A + s_B^2/n_B}} \\ &= \frac{(70.5 - 84.5)}{\sqrt{81.6/15 + 210.8/20}} \\ &= -3.502. \end{aligned}$$

Como as variâncias são distintas, t possui uma distribuição t-Student com ν graus de liberdade dado por

$$\begin{aligned}\nu &= \frac{(w_A + w_B)^2}{w_A^2/(n_A-1) + w_B^2/(n_B-1)}\\ &= \frac{(5.44+10.54)^2}{5.44^2/(15-1)+10.54^2/(20-1)}\\ &= 32.077.\end{aligned}$$

sendo $w_A = s_A^2/n_A = 81.6/15 = 5.44$ e $w_B = w_B^2/n_B = 210.8/20 = 10.54$.

A quantidade t_c é obtida na tabela da distribuição t-Student. Então, fixando α, encontramos o valor de t_c para 32 graus de liberdade como $\alpha = P(t < -t_c \cup t > t_c | H_0)$, com região crítica dada por $RC = \{t \in \Re : t < -1.694 \text{ ou } t > 1.694\}$. Logo, concluimos que a hipótese H_0 é rejeitada ao nível de significância de 10%, pois o valor t calculado pertence à região crítica.

18.

- Hipótese: Podemos considerar P_1 como a população de alunos de Ciências Humanas e P_2 a dos alunos de Ciências Biológicas. Então, podemos testar a hipótese

$$\begin{cases} H_0 : \text{a distribuição das notas são as mesmas para os dois grupos} \rightarrow P_1 = P2\\ H_1 : \text{a distribuição das notas não são as mesmas para os dois grupos} \rightarrow P_1 \neq P2\end{cases}$$

- Estatística de teste:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{c}\frac{(n_{ij}-E_{ij})^2}{E_{ij}} \sim \chi^2_{(r-1)(c-1)}$$

- Região crítica:

$$RC = \{\chi^2 \in \Re^+ : \chi^2 > 9.488\}$$

Sob a suposição da hipótese nula H_0 ser verdadeira, a distribuição de probabilidade das duas turmas deveria ser a mesma e equivaleria a ter uma única população P. A linha que representa os totais representaria uma amostra de 200 alunos da população. Ao considerar H_0 verdadeira, então devemos encontrar os valores esperados com a finalidade de aplicar a fórmula de qui-quadrado. O valor esperado é dado $E_{ij} = \frac{R_i C_j}{n}$, sendo R_i e C_j os totais de linha e coluna e n o tamanho da amostra. Dessa forma, as frequências absolutas esperadas sob H_0 são dadas por

Aluno de	Grau					Total
	A	B	C	D	E	
C. Humanas	11.5	21.5	24.0	27.0	16.0	100
C. Biológicas	11.5	21.5	24.0	27.0	16.0	100
Total	23	43	48	54	32	200

- Cálculo da estatística de teste: Note que $E_{ij} = \frac{\text{total da linha i} \times \text{total da coluna j}}{\text{total geral}}$. Então, para a linha 1 e coluna 1, temos que

$$E_{11} = \frac{23 \times 100}{200}.$$

  O procedimento é análogo para as demais combinações.

$$\begin{aligned}\chi^2 &= \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{c}\frac{(n_{ij}-E_{ij})^2}{E_{ij}} \sim \chi^2_{(r-1)(c-1)}\\ &= \frac{(15-11.5)^2}{11.5} + \ldots + \frac{(15-16.0)^2}{16.0} + \frac{(8-11.5)^2}{11.5} + \ldots \frac{(17-16.0)^2}{16.0}\\ &= 9.09.\end{aligned}$$

- Conclusão: O valor tabelado de $\chi_4^2 = 9.488$, para $\alpha = 0.05$. Logo, $\chi^2 < \chi_4^2$, o que leva à não rejeição de H_0, ou seja, a distribuição das notas é a mesma para as duas populações, então consideramos que há uma população homogênea.

---

19. Note que as frequências esperadas foram obtidas para cada valor da variável aleatória, usando a expressão da distribuição Geométrica, uma vez que assumimos $Y \sim Geo(p = 0.6)$. Assim,

$$P(Y = y) = 0.4 \times 0.6^y$$

- Hipótese:

$$\begin{cases} H_0 : Y \sim G(0.4) \\ H_1 : Y \quad \text{tem outra distribuição} \end{cases}$$

- Estatística de teste:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(n_i - E(n_i))^2}{E(n_i)} \sim \chi^2_{k-1}$$

- Região crítica:

$$RC = \{\chi^2 \in \Re^+ : \chi^2 > 9.488\}$$

- Cálculo da estatística de teste:

$$\begin{aligned} \chi^2 &= \sum_{i=1}^{k} \frac{(n_i - E(n_i))^2}{E(n_i)} \\ &= \frac{(30 - 32.0)^2}{32.0} + ... + \frac{(9 - 10.4)^2}{10.4} \quad = 3.44. \end{aligned}$$

- Conclusão: O valor de χ^2 calculado não está na região crítica, para $\alpha = 0.05$, então não rejeitamos H_0, isto é, não rejeitamos o modelo proposto sob a hipótese nula.

20.

- Hipótese:

$$\begin{cases} H_0 : \rho = 0 \\ H_1 : \rho \neq 0 \end{cases}$$

- Estatística de teste:

$$t = r\sqrt{\frac{n-2}{1-r^2}} \sim t_{(n-2)}$$

- Região crítica:

$$RC = \{t \in \Re : t < -2.353 \text{ ou } t > 2.353\}$$

- Cálculo da estatística de teste:

$$\begin{aligned} t &= 0.95\sqrt{\frac{5-2}{1-0.95^2}} \\ &= 5.270. \end{aligned}$$

- Conclusão: Como o t calculado está na região crítica, rejeitamos H_0, para $\alpha = 0.1$, isto é, existe correlação linear significativa entre anos de experiência e número de clientes.
