Exercícios

Distribuições de probabilidade

Os exercícios foram extraídos dos livros:

Bussab, WO; Morettin, PA. Estatística Básica. São Paulo: Editora Saraiva, 2006 (5ª Edição).

Magalhães, MN; Lima, ACP. Noções de Probabilidade e Estatística. São Paulo: EDUSP, 2008.

1. Sendo Y uma variável segundo o modelo Uniforme Discreto, com valores no conjunto $\{1, 2, 3, \ldots, 10\}$, pergunta-se:
   a) $P(Y \geq 7)$.
   b) $P(3 < Y \leq 7)$.
   c) $P(Y < 2 \text{ } ou \text{ } Y \geq 8)$.
   d) $P(Y \geq 5 \text{ } ou \text{ } Y \geq 8)$
   e) $P(Y > 3 \text{ } e \text{ } Y < 6)$.
   f) $P(Y \leq 9 | Y \geq 6)$.
2. Um usuário de transporte coletivo chega pontualmente às 8 horas para pegar o seu ônibus. Devido ao trânsito caótico, a demora pode ser qualquer tempo entre 1 e 20 minutos (admita que o relógio "pule" de minuto em minuto). Pergunta-se:
   a) Qual a probabilidade de demorar mais de 10 minutos?
   b) Qual a probabilidade de demorar pelo menos 5 mas não mais de 10 minutos?
   c) Qual a probabilidade da demora não chegar a 5 minutos?
   d) Se um amigo chegou 10 minutos atrasado e vai pegar o mesmo ônibus (que ainda não passou), qual a probabilidade do amigo atrasado esperar até 3 minutos?
3. Sendo Y uma variável aleatória segundo o modelo Binomial com parâmetros $n = 15$ e $p = 0.4$, pergunta-se:
   a) $P(Y \geq 14)$.
   b) $P(8 < Y \leq 10)$.
   c) $P(Y < 2 \text{ } ou \text{ } Y \geq 11)$.
   d) $P(Y \geq 11 \text{ } ou \text{ } Y > 13)$.
   e) $P(Y > 3 \text{ } e \text{ } Y < 6)$.
   f) $P(Y \leq 13 | Y \geq 11)$.
4. Uma certa doença pode ser curada por meio de procedimento cirúrgico em 80% dos casos. Dentre os que têm essa doença, sorteamos 15 pacientes que serão submetidos à cirurgia. Fazendo alguma suposição adicional que julgar necessária, responda qual é a probabilidade de:
   a) Todos serem curados.
   b) Pelo menos dois não serem curados.
   c) Ao menos 10 ficarem livres da doença.

5. A variável aleatória Y tem função de probabilidade Poisson com parâmetro $\lambda = 2$. Obtenha:
   a) $P(Y < 2)$.
   b) $P(2 \leq Y < 4)$.
   c) $P(Y > 0)$.
   d) $P(Y = 1|Y < 3)$.
6. A aplicação de fundo anti-corrosivo em chapas de aço de 1 m² é feita mecanicamente e pode produzir defeitos (pequenas bolhas na pintura) de acordo com uma variável aleatória Poisson de parâmetro $\lambda = 1$ por m². Uma chapa é sorteada ao acaso para ser inspecionada, pergunta-se a probabilidade de:
   a) Encontrarmos pelo menos 1 defeito.
   b) No máximo 2 defeitos serem encontrados.
   c) Encontrarmos de 2 a 4 defeitos.
   d) Não mais de 1 defeito ser encontrado.
7. A variável H segue o modelo Hipergeométrico com parâmetros $m = 10$, $n = 5$ e $r = 4$. Determine:
   a) $P(H = 2)$.
   b) $P(H \leq 1)$.
   c) $P(H > 0)$.
8. Por engano 3 peças defeituosas foram misturadas com boas formando um lote de 12 peças no total. Escolhendo ao acaso 4 dessas peças, determine a probabilidade de encontrar:
   a) Pelo menos 2 defeituosas.
   b) No máximo 1 defeituosa.
   c) No mínimo 1 boa.
9. Um laboratório estuda a emissão de partículas de certo material radioativo. Seja: N: *número de partículas emitidas em 1 minuto*. O laboratório admite que N tem função de probabilidade Poisson com parâmetro 5, isto é,
$$P(N = k) = \frac{e^{-5}5^k}{k!}, \; k = 0, 1, 2, \ldots$$
   a) Calcule a probabilidade de que em um minuto não haja emissões de partículas.
   b) Determine a probabilidade de que pelo menos uma partículas seja emitida em um minuto.
   c) Qual a probabilidade que, em um minuto, o número de partículas emitidas esteja entre 2 e 5 (inclusive)?
10. Uma vacina contra a gripe é eficiente em 70% dos casos. Sorteamos, ao acaso, 20 dos pacientes vacinados e pergunta-se a probabilidade de obter:
    a) Pelo menos 18 imunizados.
    b) No máximo 4 imunizados.
    c) Não mais do que 3 imunizados.
11. Uma indústria de tintas recebe pedidos de seus vendedores através de fax, telefone e Internet. O número de pedidos que chegam por qualquer meio (no horário comercial) é uma variável aleatória discreta com distribuição Poisson com taxa de 5 pedidos por hora.
    a) Calcule a probabilidade de mais de 2 pedidos por hora.
    b) Em um dia de trabalho (8 horas), qual seria a probabilidade de haver 50 pedidos?
    c) Não haver nenhum pedido, em um dia de trabalho, é um evento raro?

12. Em um estudo sobre o crescimento de jacarés, uma pequena lagoa contém 4 exemplares de espécie A e 5 da espécie B. A evolução de peso e tamanho dos 9 jacarés da lagoa é acompanhada pelos pesquisadores por meio de capturas periódicas. Determine a probabilidade de, em três jacarés capturados de uma vez, obtermos:
    a) Todos da espécie A.
    b) Nem todos serem da espécie B.
    c) A maioria ser da espécie A.
13. Suponha que em uma linha de produção, a probabilidade de se obter uma peça defeituosa é igual a 0.1. Uma amostra de 10 peças foi retirada aleatoriamente para inspeção.
    a) Para responder aos próximos itens, defina a variável aleatória de interesse e identifique-a com alguma das principais distribuições de probabilidade;
    b) Qual a probabilidade de na inspeção encontrar 3 peças defeituosas?
    c) Qual a probabilidade de que, pelo menos, 9 peças sejam perfeitas?
    d) Qual o número esperado de peças defeituosas? E o desvio padrão do número de peças defeituosas?
14. A probabilidade de um atirador acertar em um alvo é 0.8.
    a) Se o atirador dispara 5 vezes, qual a probabilidade de acertar no alvo pelo menos 3 vezes?
    b) Em 7 disparos, calcule:
        i) o número mais provável de disparos certeiros;
        ii) o número esperado de disparos certeiros.
15. Sendo $Y \sim U(0;4)$, calcule:
    a) $P(Y > 2)$.
    b) $P(Y \geq 2)$.
    c) $P(1 < Y < 2)$.
    d) $P(1 < Y < 2 | Y < 3)$.
    e) $P(Y < 3 | 1 < Y < 2)$.
16. Admite-se que uma pane pode ocorrer em qualquer ponto de uma rede elétrica de 10 quilômetros.
    a) Qual é probabilidade da pane ocorrer nos primeiros 500 metros? E de ocorrer nos 3 quilômetros centrais da rede?
    b) O custo de reparo da rede depende da distância do centro de serviço ao local da pane. Considere que o centro de serviço está na origem da rede e que o custo é de R$ 200 para distâncias até 3 quilômetros, de R$ 400 entre 3 e 8 e de R$ 1000 para as distâncias acima de 8 quilômetros. Qual é o custo médio do conserto?
17. O tempo necessário para um medicamento contra dor fazer efeito foi modelado de acordo com a densidade Uniforme no intervalo de 5 a 15 (em minutos), tendo por base experimentos conduzidos em animais. Um paciente, que esteja sofrendo dor, recebe o remédio e, supondo válido o modelo mencionado acima, pergunta-se a probabilidade da dor:
    a) Cessar em até 10 minutos?
    b) Demorar pelo menos 12 minutos?
    c) Durar mais de 7 minutos, sabendo-se que durou menos de 10?
18. Suponha que o valor esperado de uma variável aleatória com distribuição Uniforme contínua é 1 e a variância é igual a 1/12. Encontre a probabilidade da variável assumir valores menores que 3/4.

19. Sendo $Y \sim Exp(1)$, determine:

    a) $P(0 < Y < 2)$.
    b) $P(Y < 2)$.
    c) $P(1 < Y < 4)$.
    d) $P(Y > 3)$.
    e) $P(Y < 2|Y > 1)$.

20. Suponha que o tempo de vida T de um vírus exposto ao meio ambiente segue uma distribuição Exponencial com parâmetro $\lambda = 1/20$ s. Calcule a probabilidade condicional $P(T > 15|T > 10)$.

21. Seja $Y \sim N(4, 1)$. Determine:

    a) $P(Y \leq 4)$.
    b) $P(4 < Y < 5)$.
    c) $P(2 \leq Y < 5)$.
    d) $P(5 \leq Y \leq 7)$.
    e) $P(Y \leq 1)$.
    f) $P(0 \leq Y \leq 2)$.

22. A durabilidade de um tipo de filtro é descrita por uma variável aleatória com distribuição normal de média 60.000 hrs de funcionamento e desvio padrão de 9.000 hrs.

    a) Se o fabricante garante a duração dos filtros pelas primeiras 47.500 hrs, qual a proporção de filtros que devem ser trocados pela garantia?
    b) O que aconteceria com a proporção do item anterior se a garantia fosse para as primeiras 45.000 hrs?
    c) Qual deveria ser a garantia (em hrs) de forma a assegurar que o fabricante trocaria sob garantia no máximo 4% dos filtros?
    d) Se uma indústria comprar cinco (5) filtros, qual será a probabilidade de utilizar a garantia (de 45.000 horas) para trocar ao menos um (1) dos filtros?

23. Em um laticínio, a temperatura ideal do pasteurizador deve ser de 75°C. Se a temperatura ficar inferior a 70°C, o leite poderá ficar com bactérias indesejáveis ao organismo humano. Observações do processo mostram que, na forma de operação atual, os valores da temperatura seguem uma distribuição normal com média de 74.2°C e desvio padrão de 2.2°C.

    a) Qual a probabilidade da temperatura ficar inferior a 70°C?
    b) Qual a probabilidade da temperatura ultrapassar os 75°C desejados?
    c) Qual a probabilidade de que, em 20 pasteurizações, alguma(s) dela(s) não atinja(m) a temperatura de 70°C?
    d) Deseja-se regular equipamentos para alterar a temperatura média do processo para que a probabilidade de ficar inferior a 70°C seja de, no máximo, 0.0005. Qual deveria ser a nova média de operação?
    e) Suponha, agora, que a nova média de operação seja de 74.5°C. Deseja-se alterar o desvio padrão para satisfazer as condições do item anterior. Qual deve ser o novo desvio padrão de operação?

24. Seja Z uma variável aleatória com distribuição Normal(0,1). Encontre o valor de z tal que:

    a) $P(Z > z) = 0.119$

    b) $P(Z < z) = 0.8051$

25. A vida média de um teodolito é de 3 anos com desvio padrão de 0.61. Supondo que a vida útil dos teodolitos siga uma distribuição Normal, é razoável um prazo de garantia de 2.5 anos para este aparelho?

26. A quantidade de urânio de uma formação argilosa possui média igual a 95 u.m. e desvio padrão igual a 7.5 u.m. Sabendo-se que Y (quantidade de urânio numa amostra aleatória dessa formação) é uma variável aleatória com distribuição Normal, ache a quantidade b tal que:
    a) $P(Y > b) = 0.2611$
    b) $P(Y < b) = 0.9750$
27. O tempo de espera para cada cliente que entra na fila do caixa de uma loja, segue uma distribuição de probabilidade exponencial com taxa igual a 0.2 por minuto. Calcule:
    a) o tempo médio de espera e o desvio padrão do tempo de espera;
    b) a probabilidade de um cliente selecionado ao acaso, ficar até 20 minutos na fila;
    c) e a probabilidade dele ficar na fila mais tempo que a média.
28. É sabido que, para homens adultos com boa saúde, em certa população, a temperatura corporal segue uma distribuição normal com média 36.8^o C e desvio padrão 0.15^o C.
    a) Se considerarmos 1000 homens adultos sadios dessa população, esperaríamos quantos com temperatura entre 36.8^o C e 37.2^o C?
    b) Em qual intervalo de temperaturas estão 98% dos homens adultos sadios dessa população? (considere intervalos simétricos em torno da média)

UFPR
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

DEST
Departamento de Estatística

Respostas

1. Sendo Y uma variável segundo o modelo Uniforme Discreto, com valores no conjunto $\{1, 2, 3, \ldots, 10\}$, pergunta-se:
   a) $P(Y \geq 7) = P(Y = 7) + P(Y = 8) + P(Y = 9) + P(Y = 10) = 4 \cdot \frac{1}{10} = 0.4.$
   b) $P(3 < Y \leq 7) = P(Y = 4) + P(Y = 5) + P(Y = 6) + P(Y = 7) = 4 \cdot \frac{1}{10} = 0.4.$
   c) $P(Y < 2 \text{ ou } Y \geq 8) = P(Y < 2) + P(Y \geq 8) = P(Y = 1) + P(Y = 8) + P(Y = 9) + P(Y = 10) = 0.4.$
   d) $P(Y \geq 5 \text{ ou } Y \geq 8) = P(Y \geq 5) = \frac{6}{10} = 0.6.$
   e) $P(Y > 3 \text{ e } Y < 6) = P(3 < Y < 6) = P(Y = 4) + P(Y = 5) = \frac{2}{10} = 0.2.$
   f)

$$\begin{aligned} P(Y \leq 9 | Y \geq 6) &= \frac{P(6 \leq Y \leq 9)}{P(Y \geq 6)} \\ &= \frac{P(Y=6)+P(Y=7)+P(Y=8)+P(Y=9)}{P(Y=6)+P(Y=7)+P(Y=8)+P(Y=9)+P(Y=10)} \\ &= \frac{4/10}{5/10} \\ &= 0.8. \end{aligned}$$

---

2. Um usuário de transporte coletivo chega pontualmente às 8 horas para pegar o seu ônibus. Devido ao transito caótico, a demora pode ser qualquer tempo entre 1 e 20 minutos (admita que o relógio "pule" de minuto em minuto). Pergunta-se:

$$\begin{aligned} D &: \text{tempo de espera, } D \sim U_D(1, 20) \\ d &\in \{0, 1, 2, \cdots, 20\} \\ P(D = d) &= 1/20 \end{aligned}$$

   a) Qual a probabilidade de demorar mais de 10 minutos?

$$P(D > 10) = P(D = 11) + \cdots + P(D = 20) = 10/20 = 0.5.$$

   b) Qual a probabilidade de demorar pelo menos 5 mas não mais de 10 minutos?

$$P(5 \leq D \leq 10) = P(D = 5) + P(D = 6) + P(D = 7) + P(D = 8) + P(D = 9) + P(D = 10) = 6/20 = 0.3.$$

   c) Qual a probabilidade da demora não chegar a 5 minutos?

$$P(D < 5) = P(D = 1) + \cdots + P(D = 4) = 4/20 = 0.2.$$

   d) Se um amigo chegou 10 minutos atrasado e vai pegar o mesmo ônibus (que ainda não passou), qual a probabilidade do amigo atrasado esperar até 3 minutos?

$$P(D \leq 13 | D > 10) = \frac{P(10 < D \leq 13)}{P(D > 10)} = \frac{3/20}{10/20} = 0.3.$$

---

3. Sendo Y uma variável aleatória segundo o modelo Binomial com parâmetros $n = 15$ e $p = 0.4$, pergunta-se:

$$Y \sim b(15, 0.4).$$
$$P(Y = y) = \binom{15}{y} \cdot 0.4^y \cdot 0.6^{15-y}, \text{para } y = 0, 1, 2, \cdots, 15.$$

a)
$$P(Y \geq 14) = P(Y = 14) + P(Y = 15) = 0.$$

b)
$$P(8 < Y \leq 10) = P(Y = 9) + P(Y = 10) = 0.086.$$

c)
$$P(Y < 2 \text{ ou } Y \geq 11) = P(Y = 0) + P(Y = 1) + P(Y = 11) + P(Y = 12) + \cdots + P(Y = 15) = 0.015.$$

d)
$$P(Y \geq 11 \text{ ou } Y > 13) = P(Y \geq 11) = P(Y = 11) + \cdots + P(Y = 15) = 0.009.$$

e)
$$P(Y > 3 \text{ e } Y < 6) = P(3 < Y < 6) = P(Y = 4) + P(Y = 5) = 0.313.$$

f)
$$\begin{aligned} P(Y \leq 13 | Y \geq 11) &= \frac{P(11 \leq Y \leq 13)}{P(Y \geq 11)} \\ &= \frac{P(Y = 11) + P(Y = 12) + P(Y = 13)}{P(Y = 11) + P(Y = 12) + P(Y = 13) + P(Y = 14) + P(Y = 15)} \\ &= \frac{0.00932}{0.00935} \\ &= 0.9968. \end{aligned}$$

---

4. Uma certa doença pode ser curada através de procedimento cirúrgico em 80% dos casos. Dentre os que têm essa doença, sorteamos 15 pacientes que serão submetidos à cirurgia. Fazendo alguma suposição adicional que julgar necessária, responda qual é a probabilidade de:

$$\begin{aligned} &Y : \text{número de pacientes curados} \\ &p : \text{probabilidade de um paciente curar} \\ &p = 0.8 \\ &n = 15 \\ &Y \sim b(15, 0.8). \end{aligned}$$

a) Todos serem curados?
$$P(Y = 15) = \binom{15}{15} \cdot 0.8^{15} \cdot 0.2^{15-15} = 0.035.$$

b) Pelo menos dois não serem curados?
$$P(Y \leq 13) = 1 - P(Y > 13) = 1 - (P(Y = 14) + P(Y = 15)) = 0.833.$$

c) Ao menos 10 ficarem livres da doença?
$$P(Y \geq 10) = P(Y = 10) + \cdots + P(Y = 15) = 0.939.$$

---

5. A variável aleatória Y tem função de probabilidade Poisson com parâmetro $\lambda = 2$. Obtenha:

$$Y \sim Po(\lambda = 2).$$
$$P(Y = y) = \frac{e^{\lambda}\lambda^{y}}{y!} = \frac{e^{2} \cdot 2^{y}}{y!}.$$

a) $P(Y < 2) = P(Y = 0) + P(Y = 1) = \frac{e^{-2} \cdot 2^{0}}{0!} + \frac{e^{-2} \cdot 2^{1}}{1!} = 0.406.$
b) $P(2 \leq Y < 4) = P(Y = 2) + P(Y = 3) = 0.451.$
c) $P(Y > 0) = 1 - P(Y \leq 0) = 1 - P(Y = 0) = 0.865.$
d) $P(Y = 1|Y < 3) = \frac{P(Y=1)}{P(Y<3)} = 0.4.$

---

6. A aplicação de fundo anti-corrosivo em chapas de aço de 1 m^2 é feita mecanicamente e pode produzir defeitos (pequenas bolhas na pintura), de acordo com uma variável aleatória Poisson de parâmetro $\lambda = 1$ por m^2. Uma chapa é sorteada ao acaso para ser inspecionada, pergunta-se a probabilidade de:

$$Y \sim Po(\lambda = 1).$$
$$P(Y = y) = \frac{e^{-1}1^{y}}{y!}.$$

a) Encontrarmos pelo menos 1 defeito.

$$P(\geq 1) = 1 - P(Y < 1) = 1 - P(Y = 0) = 1 - \frac{e^{1} \cdot 1^{0}}{0!} = 0.632.$$

b) No máximo 2 defeitos serem encontrados.

$$P(Y \leq 2) = P(Y = 0) + P(Y = 1) + P(Y = 2) = 0.92.$$

c) Encontrarmos de 2 a 4 defeitos.

$$P(2 \leq Y \leq 4) = P(Y = 2) + P(Y = 3) + P(Y = 4) = 0.261.$$

d) Não mais de 1 defeito ser encontrado.

$$P(Y \leq 1) = P(Y = 0) + P(Y = 1) = 0.736.$$

---

7. A variável H segue o modelo Hipergeométrico com parâmetros $m = 10$, $n = 5$ e $r = 4$. Determine:

$$H \sim HG(m = 10, n = 5, r = 4).$$
$$h = \{max(0, 4 - 5), \cdots, min(4, 5)\} = \{0, \cdots, 4\}.$$
$$P(H = h) = \frac{\binom{m}{h}\binom{n}{r-h}}{\binom{m+n}{r}} = \frac{\binom{10}{h}\binom{5}{4-h}}{\binom{10+5}{4}}.$$

a) $P(H = 2) = \frac{\binom{10}{2}\binom{5}{4-2}}{\binom{10+5}{4}} = 0.33.$
b) $P(H \leq 1) = P(H = 0) + P(H = 1) = 0.0769.$
c) $P(H > 0) = 1 - P(H = 0) = 0.996.$

---

8. Por engano 3 peças defeituosas foram misturadas com boas formando um lote de 12 peças nos total. Escolhendo ao acaso 4 dessas peças, determine a probabilidade de encontrar:

$$D : \text{número de peças defeituosas dentre as 4.}$$
$$D \sim HG(n = 3, m = 9, r = 4), d = \{0, 1, 2, 3, 4\}.$$
$$P(D = d) = \frac{\binom{m}{d}\binom{n}{r-d}}{\binom{m+n}{r}}.$$

a) Pelo menos 2 defeituosas.

$$P(D \geq 2) = 1 - P(D < 2) = 1 - (P(D = 0) + P(D = 1)) = 1 - \frac{\binom{3}{0}\binom{9}{4-0}}{\binom{9+3}{4}} - \frac{\binom{3}{1}\binom{9}{4-1}}{\binom{9+3}{4}} = 0.236.$$

b) No máximo 1 defeituosa.

$$P(D \leq 1) = P(D = 0) + P(D = 1) = 0.764.$$

c) No mínimo 1 boa.

$$P(\text{No mínimo 1 boa}) = P(D \leq 3) = 1.$$

---

9. Um laboratório estuda a emissão de partículas de certo material radioativo. Seja: N: *número de partículas emitidas em 1 minuto*. O laboratório admite que N tem função de probabilidade Poisson com parâmetro 5, isto é,

$$P(N = k) = \frac{e^{-5}5^k}{k!}, \; k = 0, 1, 2, \ldots$$

a) Calcule a probabilidade de que em um minuto não haja emissões de partículas.

$$P(N = 0) = \frac{e^{-5}5^0}{0!} = 0.007.$$

b) Determine a probabilidade de que pelo menos uma partícula seja emitida em um minuto.

$$P(N \geq 1) = 1 - P(N = 0) = 0.993.$$

c) Qual a probabilidade que, em um minuto, o número de partículas emitidas esteja entre 2 e 5 (inclusive)?

$$P(2 \leq N \leq 5) = P(N = 2) + P(N = 3) + P(N = 4) + P(N = 5) = 0.576.$$

---

10. Uma vacina contra a gripe é eficiente em 70% dos casos. Sorteamos, ao acaso, 20 dos pacientes vacinados e pergunta-se a probabilidade de obter:

$$\begin{aligned} &Y : \text{número de pacientes imunizados dentre 20 pacientes vacinados.} \\ &Y \sim b(n = 20, p = 0.7), y = \{0, 1, \cdots, 20\}. \\ P(Y = y) = &\binom{20}{y} \cdot 0.7^y \cdot 0.3^{20-y}. \end{aligned}$$

a) Pelo menos 18 imunizados.

$$P(Y \geq 18) = P(Y = 18) + P(Y = 19) + P(Y = 20) = 0.0355.$$

b) No máximo 4 imunizados.

$$P(Y \leq 4) = P(Y = 0) + \cdots + P(Y = 4) = 5.55 \times 10^{-6}.$$

c) Não mais do que 3 imunizados.

$$P(Y \leq 3) = P(Y = 0) + \cdots + P(Y = 3) = 5.43 \times 10^{-7}.$$

---

11. Uma indústria de tintas recebe pedidos de seus vendedores através de fax, telefone e Internet. O número de pedidos que chegam por qualquer meio (no horário comercial) é uma variável aleatória discreta com distribuição Poisson com taxa de 5 pedidos por hora.

$$\begin{aligned} &Y : \text{número de pedidos.} \\ &Y \sim Po(5), y = \{0, 1, 2, \cdots\}. \\ P(Y = y) = &\frac{e^{-5}5^y}{y!}. \end{aligned}$$

a) Calcule a probabilidade de mais de 2 pedidos por hora.

$$P(Y > 2) = 1 - P(Y \leq 2) = 1 - (P(Y = 0) + P(Y = 1) + P(Y = 2)) = 0.875.$$

b) Em um dia de trabalho (8 horas), qual seria a probabilidade de haver 50 pedidos? Considere $\lambda = 5 \cdot 8 = 40$.

$$P(Y = 50) = \frac{e^{-40}40^{50}}{50!} = 0.018.$$

Dica: para facilitar os cálculos use a transformação log (logaritmo natural)

$$\begin{aligned} logP(Y = 50) &= log(e^{-40}) + log(40^{50}) - log(50 \cdot 49 \cdots 1) \\ &= -40 \cdot log(e) + 50 \cdot log(40) - (log50 + log49 + \cdots + log1) \\ &= -40 + 50 \cdot 3.69 - 148.48 \\ &= -3.98. \end{aligned}$$

Então, $P(Y = 50) = e^{-3.98} = 0.0187$.

c) Não haver nenhum pedido, em um dia de trabalho, é um evento raro? Considere $\lambda = 40$.

$$P(Y = 0) = \frac{e^{-40}40^0}{0!} = 0.$$

---

12. Em um estudo sobre o crescimento de jacarés, uma pequena lagoa contém 4 exemplares de espécie A e 5 da espécie B. A evolução de peso e tamanho dos 9 jacarés da lagoa é acompanhada pelos pesquisadores através de capturas periódicas. Determine a probabilidade de, em três jacarés capturados de uma vez, obtemos:

$$Y: \text{número de jacarés da espécie A.}$$
$$Y \sim HG(m=4, n=5, r=3).$$
$$P(Y=y) = \frac{\binom{4}{y}\binom{5}{3-y}}{\binom{5+4}{3}} \quad \text{para } y = 0,1,2,3.$$

a) Todos da espécie A.

$$P(X=3) = \frac{\binom{4}{3}\binom{5}{3-3}}{\binom{5+4}{3}} = 0.048.$$

b) Nem todos serem da espécie B.

$$P(X>0) = 1 - P(X=0) = 1 - \frac{\binom{4}{3}\binom{5}{3-0}}{\binom{9}{3}} = 0.881,$$

que é equivalente a $P(X^c \neq 3) = 1 - P(X^c = 3) = 1 - \frac{\binom{4}{3}\binom{5}{3-3}}{\binom{9}{3}} = 0.881.$

c) A maioria ser da espécie A.

$$P(X \geq 2) = P(X=2) + P(X=3) = \frac{\binom{4}{2}\binom{5}{3-2} + \binom{4}{3}\binom{5}{3-3}}{\binom{9}{3}} = 0.405.$$

---

13. a) Y : Número de peças defeituosas dentre 10
b) 0.0574
c) 0.7361
d) $E(X) = 1$ peça defeituosa; $DP(X) = 0.9487$ peça defeituosa

---

14. a) 0.94208
b) i) 6 acertos
c) ii) 5.6 acertos

---

15. Sendo $Y \sim U(0;4)$, calcule:

$$f(y) = \frac{1}{4}, 0 \leq y \leq 4$$

a) $P(Y>2) = \int_2^4 f(y)dy = \frac{y}{4}|_2^4 = \frac{1}{4}(4-2) = 1/2.$
b) $P(Y \geq 2) = P(Y > 2) = 1/2.$
c) $P(1 < Y < 2) = \int_1^2 f(y)dy = \frac{y}{4}|_1^2 = \frac{1}{4}(2-1) = 1/4.$
d) $P(1<Y<2|Y<3) = \frac{P(1<Y<2)}{P(Y<3)} = \frac{1/4}{\int_0^3 f(y)dy} = \frac{1/4}{y/4|_0^3} = \frac{1/4}{3/4} = 1/3.$
e) $P(Y<3|1<Y<2) = \frac{P(1<Y<2)}{P(1<Y<2)} = 1.$

---

16. Admite-se que uma pane pode ocorrer em qualquer ponto de uma rede elétrica de 10 quilômetros.

$$Y: \text{ocorre a pane em qualquer ponto da rede.}$$
$$Y \sim U(0,10).$$
$$f(y) = \frac{1}{10}, \quad 0 \leq y \leq 10.$$

a) Qual é probabilidade da pane ocorrer nos primeiros 500 metros? E de ocorrer nos 3 quilômetros centrais da rede?

$$P(Y < 0.5) = \int_0^{0.5} \frac{1}{10} dy = \frac{y}{10}|_0^{0.5} = 0.5/10 = 0.05$$

$$P(3.5 \leq Y \leq 6.5) = \int_3^6 \frac{1}{10} dy = 3/10$$

b) O custo de reparo da rede depende da distância do centro de serviço ao local da pane. Considere que o centro de serviço está na origem da rede e que o custo é de R$ 200 para distâncias até 3 quilômetros, de R$ 400 entre 3 e 8 e de R$ 1000 para as distâncias acima de 8 quilômetros. Qual é o custo médio do conserto?

Considere a variável C: Custo de reparo. Então,

C	200	400	1000
p_c	p_1	p_2	p_3

$$p_1 = P(C = 200) = P(Y \leq 3) = \int_0^3 \frac{1}{10} dy = 3/10 = 0.3.$$

$$p_2 = P(C = 400) = P(3 \leq Y \leq 8) = \int_3^8 \frac{1}{10} dy = 5/10 = 0.5$$

$$p_3 = P(C = 1000) = P(Y > 8) = \int_8^{10} \frac{1}{10} dy = 2/10 = 0.2$$

$$E(C) = 200 \cdot p_1 + 400 \cdot p_2 + 1000 \cdot p_3 = 460$$

17. O tempo necessário para um medicamento contra dor fazer efeito foi modelado de acordo com a densidade Uniforme no intervalo de 5 a 15 (em minutos), tendo por base experimentos conduzidos em animais. Um paciente, que esteja sofrendo dor, recebe o remédio e, supondo válido o modelo mencionado acima, pergunta-se a probabilidade da dor:

$$T: \text{tempo até medicamento fazer efeito.}$$
$$T \sim U(5, 15).$$
$$f(t) = \frac{1}{15-5}, 5 \leq t \leq 15.$$

a) Cessar em até 10 minutos?

$$P(T \leq 10) \int_5^{10} f_t dt = \int_5^{10} \frac{1}{10} dt = 5/10 = 1/2.$$

b) Demorar pelo menos 12 minutos?

$$P(T > 12) = \int_{12}^{15} \frac{1}{10} dt = 3/10.$$

c) Durar mais de 7 minutos, sabendo-se que durou menos de 10?

$$P(T > 7|T < 10) = \frac{P(7 < T < 10)}{P(T < 10)} = \frac{\int_7^{10} 1/10dt}{\int_5^{10} 1/10dt} = \frac{3/10}{5/10} = 3/5.$$

---

18. Suponha que o valor esperado de uma variável aleatória com distribuição Uniforme contínua é 1 e a variância é igual a 1/12. Encontre a probabilidade da variável assumir valores menores que 3/4.

$$Y \sim U(a, b)$$
$$E(Y) = 1 = \frac{a+b}{2}$$
$$Var(Y) = 1/12 = \frac{(b-a)^2}{12} \rightarrow (2-2a)^2 = 1 \rightarrow (4a^2 - 8a + 3) = 0$$

Resolvendo esta equação temos que $a = 0.5$ e $b = 1.5$ ou $a = 1.5$ e $b = 0.5$. Como $(a < b)$ então a solução é $Y \sim U(0.5, 1.5)$.

$$P(Y < 3/4) = \int_{0.5}^{0.75} \frac{1}{1.5-0.5} dy = 0.25.$$

---

19. Sendo $Y \sim Exp(1)$, determine:

$$f(y) = e^{-y}, y \geq 0$$

a) $P(0 < Y < 2) = \int_0^2 e^{-y} dy = -e^{-y}|_0^2 = -e^{-2} + e^0 = 1 - e^{-2} = 0.865.$
b) $P(Y < 2) = \int_0^2 e^{-y} dy = -e^{-y}|_0^2 = -e^{-2} + 1 = 0.865.$
c) $P(1 < Y < 4) = \int_1^4 e^{-y} dy = -e^{-y}|_1^4 = -e^{-4} + e^{-1} = 0.35.$
d) $P(Y > 3) = 1 - P(Y \leq 3) = 0.05.$
e) $P(Y < 2|Y > 1) = \frac{P(1<Y<2)}{P(Y>1)} = 0.632.$

---

20. Suponha que o tempo de vida T de um vírus exposto ao meio ambiente segue uma distribuição Exponencial com parâmetros $\lambda = 1/20$ s. Calcule a probabilidade condicional $P(T > 15|T > 10)$.

$$T \sim Exp(1/20)$$
$$f(t) = 1/20 \cdot e^{-(1/20)t}, t \geq 0$$

$$P(T > 15|T > 10) = \frac{P(T > 15)}{P(T > 10)} = \frac{\int_{15}^{\infty} 1/20 \cdot e^{-(1/20)t} dt}{\int_{10}^{\infty} 1/20 \cdot e^{-(1/20)t} dt} = \frac{0.472}{0.607} = 0.779$$

---

21. Seja $Y \sim N(4, 1)$. Determine:

$$f(y) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

a) $P(Y \leq 4) = \int_{-\infty}^{4} f(y)dy = 0.5$.
b) $P(4 < Y < 5) = P(Y < 5) - P(Y < 4) = 0.341$.
c) $P(2 \leq Y < 5) = P(Y < 5) - P(Y < 2) = 0.819$.
d) $P(5 \leq Y \leq 7) = P(Y < 7) - P(Y < 5) = 0.157$.
e) $P(Y \leq 1) = 0.001$.
f) $P(0 \leq Y \leq 2) = 0.023$.

---

22. A durabilidade de um tipo de filtro é descrita por uma variável aleatória com distribuição normal de média 60.000 horas de funcionamento e desvio padrão de 9.000 horas.

$$Y \sim N(60.000, 9.000^2)$$

a) Se o fabricante garante a duração dos filtros pelas primeiras 47.500 horas, qual a proporção de filtros que devem ser trocados pela garantia?

$$P(Y < 47500) = P(Z < \frac{47500 - 60000}{9000}) = P(Z < -1.389) = 0.082.$$

b) O que aconteceria com a proporção do item anterior se a garantia fosse para as primeiras 45.000 horas?

$$P(Y < 45000) = P(Z < \frac{45000 - 60000}{9000}) = P(Z < -1.667) = 0.048.$$

c) Qual deveria ser a garantia (em hrs) de forma a assegurar que o fabricante trocaria sob garantia no máximo 4% dos filtros?

$$P(Y < t) = 0.04 \;\; ; \;\; t = ?$$
$$P(Z < \frac{t - 60000}{9000}) = 0.04$$
$$z = -1.751.$$
$$\frac{t - 60000}{9000} = -1.751$$
$$t = 60000 + 9000(-1.751)$$
$$t = 4.4243825 \times 10^4.$$

d) Se uma indústria comprar cinco (5) filtros, qual será a probabilidade de utilizar a garantia (de 45.000 horas) para trocar ao menos um (1) dos filtros?

Y : número de trocados sob garantia dentre 5 comprados .
$$Y \sim b(n = 5, p = P(Y < 45000) = 0.048).$$
$$P(Y \geq 1) = 1 - P(Y = 0) = 0.217.$$

---

23. Em um laticínio, a temperatura ideal do pasteurizador deve ser de 75°C. Se a temperatura ficar inferior a 70°C, o leite poderá ficar com bactérias indesejáveis ao organismo humano. Observações do processo mostram que na forma de operação atual os valores da temperatura seguem uma distribuição normal com média de 74.2°C e desvio padrão de 2.2°C.

$$Y : \text{temperatura do pasteurizador.}$$
$$Y \sim N(74.2; 2.2^2).$$

a) Qual a probabilidade da temperatura ficar inferior a 70°C?

$$P(Y < 70) = P(Z < (70 - 74.2)/2.2) = 0.0281.$$

b) Qual a probabilidade da temperatura ultrapassar os 75°C desejados?

$$P(Y > 75) = P(Z < (75 - 74.2)/2.2) = 0.3581.$$

c) Qual a probabilidade de que em 20 pasteurizações, alguma(s) dela(s) não atinja(m) a temperatura de 70°C?

$$\begin{aligned} Y &: \text{número de pasteurizações que não atingem } 70°C. \\ Y &\sim b(20, p). \\ p &= P(Y < 70) = 0.0281. \\ P(Y \geq 1) &= 1 - P(Y = 0) = 0.435. \end{aligned}$$

d) Deseja-se regular equipamentos para alterar a temperatura média do processo para que a probabilidade de ficar inferior a 70°C seja de no máximo 0.0005. Qual deveria ser a nova média de operação?

$$\begin{aligned} P(Y < 70|\mu_0) &= 0.0005 \\ z_{0.0005} &= (y - \mu_0)/\sigma \\ -3.291 &= (70 - \mu_0)/2.2. \\ \mu_0 &= 70 - 2.2(-3.291) = 77.2402. \end{aligned}$$

e) Suponha agora que a nova média de operação seja de 74.5°C. Deseja-se então alterar o desvio padrão para satisfazer as condições do item anterior. Qual deve ser o novo desvio padrão de operação?

$$\begin{aligned} P(Y < 70|\sigma_0) &= 0.0005. \\ z_{0.0005} &= (y - 74.5)/\sigma_0 \\ -3.291 &= (70 - 74.5)/\sigma_0 \\ \sigma_0 &= (70 - 74.5)/(-3.291) = 1.37. \end{aligned}$$

---

24. a) $z = 1.18$
b) $z \approx 0.86$

---

25. Seja Y : vida útil (em anos) do aparelho, então: $P(\text{aparelho quebrar depois do prazo de garantia}) = P(Y > 2.5) = P(Z > -0.82) = 0.79389$

---

26. a) $z \approx 0.64 \rightarrow b \approx 99.8$
    b) $z = 1.96 \rightarrow b = 109.7$

---

27. Seja T : tempo de espera (em minutos), então:
    a) $E(T) = 5$ minutos e $DP(T) = 5$ minutos
    b) 0.9817
    c) 0.3679

---

28. Seja Y : temperatura corporal de homens adultos sadios (em graus Celsius), então:
    a) aproximadamente 496 homens
    b) entre 36.45 e 37.15 graus